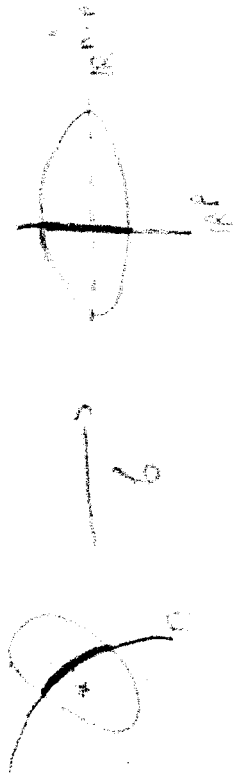


Sous-variétés de \mathbb{R}^n - exemples.

I) Sous-variétés - définitions:

def 1: Une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n si pour tout $x \in \Omega$, il existe des voisinages ouverts U et V de x et 0 dans \mathbb{R}^n respectivement et un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty f$ tq:

$$f: U \rightarrow V \text{ et } f(U \cap \Omega) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p).$$



def 2: Une submersion de classe \mathcal{C}^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^q est une application \mathcal{C}^k de U dans \mathbb{R}^q dont la différentielle en tout point est surjective. ($q \leq p$).

proposition 1: (caractérisation implicite)

Ω est une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n si et seulement si pour tout $x \in \Omega$ il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant x et une submersion $\mathcal{C}^\infty g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tq $U \cap \Omega = g^{-1}(\{0\})$.

ex 1. Sphère $S_n = g^{-1}(\{0\})$ où $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto \|x\|^2 - 1$.

Tore $T^2 = g^{-1}(\{0\})$ où $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - 1, z^2 + z - 1)$

$S_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ $S_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{0\})$ où $g: \mathbb{N}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Omega \mapsto \det \Omega - 1$.
 $\Rightarrow \dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

$O_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ $O_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{0\})$ où $g: \mathbb{N}(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$
 $\Omega \mapsto \Omega \Omega^T - I$.
 contre-exemple: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 3xy = 0\}$

def 3: Une immersion de classe \mathcal{C}^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R}^n est une application \mathcal{C}^k de U dans \mathbb{R}^n différentiable en tout point est injective (p. 54).

proposition 2: (caractérisation paramétrique).

Ω est une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n si et seulement si pour tout $a \in \Omega$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , Ω un ouvert de \mathbb{R}^p et une application $\mathcal{C}^\infty h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme de Ω sur $U \cap \Omega$. On dit que \mathbb{R} est une paramétrisation de Ω .

exemple 2
 $S_n: \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $x \mapsto (\|x\|^2 - 1, 2x_1, \dots, 2x_n)$ Ω
 $\|x\|^2 + 1$

$T^2: h: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x_1, x_2) \mapsto (\cos(x_1), \sin(x_1), \cos(x_2), \sin(x_2))$

hélicoïde: $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(\theta, r) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \theta)$

Remarque 1: la condition que l'immersion soit un homéomorphisme est nécessaire comme le montre le contre-exemple:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos \sqrt{t}, \sin \sqrt{t})$$

h est une immersion, son image est une courbe dense sur le tore.

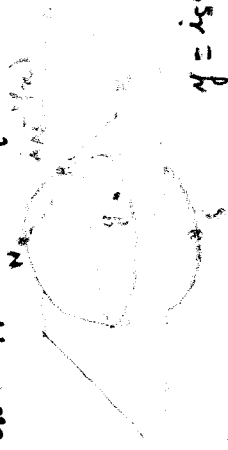
Remarque 2: Soit h_1 et h_2 deux paramétrisations de $\mathbb{R}^n \cup_1 = V_1$ et $\mathbb{R}^n \cup_2 = V_2$ par U_1 et U_2 ouverts de \mathbb{R}^n et $q_1, q_2: V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ alors: $h_1^{-1} \circ h_2: (V_1 \cap V_2) \rightarrow h_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ est un \mathbb{C}^∞ difféomorphisme.

def 4: On appelle carte la donnée (\mathbb{R}^n, U) tel que h soit une paramétrisation de $\mathbb{R}^n \cup$.

exemple 3. S^n peut être définie par deux cartes:

$$U_1 = S^n \setminus N \quad U_2 = S^n \setminus S \quad N = (1, 0, \dots), \quad S = (-1, 0, \dots)$$

$i_N: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_0}$



$$i_S: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_0}$$

proposition 3: (graphe local)

\mathbb{R} est une sous variété de dimension 1 de \mathbb{R}^2 n'est nullement h_1 pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^2 contenant a , un ouvert V de \mathbb{R}^1 contenant (a, \dots, a_0) et une application linéaire g de V dans \mathbb{R}^{n-1} tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap \mathbb{R}^n$ est égal au graphe de g .

$$y = \text{isow}^{-1}(x)$$

exemple 4. hélicoïde: $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$

$$\cdot \pi^2: G: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2})$$

II / Plan tangent et fonctions entre sous variétés.

1) Plan tangent:

def 5: On dit qu'un vecteur est tangent en un point a d'une partie A de \mathbb{R}^n s'il existe une application différentiable $c:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tq: $c(0) = a, c'(0) = \vec{v}$.

proposition et définition 6: Les vecteurs tangents en un point a à une sous variété de dimension p de \mathbb{R}^n forme un espace vectoriel de dimension p . C'est l'espace tangent à Π en a on le note $Ta\Pi$.

proposition 4: En conservant les notations de I, selon les caractérisations de Π , $Ta\Pi$ est donné par:

- (i) implémente: $Ta\Pi = \text{ker } dg|_a$.
- (ii) paramétrique: $Ta\Pi = \text{Im } d\tilde{h}|_a$.
- (iii) graphe: $Ta\Pi = \text{graphe de } dg|_a$.

exemples. S^n $Ta\Pi = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0 \}$.

- hélicoïde: $T_0 S^1 = \{ (x, -\sin x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.
- $SL_n(\mathbb{R})$ $T_{Id} S_n = \mathcal{M}_n = \{ \text{matrices de trace nulle} \}$.
- $O_n(\mathbb{R})$ $T_{Id} O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n = \{ \text{matrices anti-symétriques} \}$.
- $T_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

2) Applications différentiables:

def 6: Soient N et N deux variétés \mathbb{C}^∞ . Une application continue f de N dans N est dite \mathbb{C}^k si quel que soit $u \in N$, il existe une carte (U, φ) de N , avec $a \in U$, une carte (V, ψ) , avec $f(a) \in V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est \mathbb{C}^k .

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U) \rightarrow \psi(V \cap V)$ de classe \mathbb{C}^k

exemple 6: M sous variété $\dim(M) = p$, $N \subset \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathbb{C}^k alors $f|_M : M \rightarrow N$ de classe \mathbb{C}^k .

- $Q_1(\mathbb{R}) \times Q_2(\mathbb{R}) \rightarrow Q_3(\mathbb{R})$ et $Q_n(\mathbb{R}) \rightarrow Q_n(\mathbb{R})$ sont \mathbb{C}^∞ .
- $(A, B) \mapsto AB$ $A \mapsto A^{-1}$

Soit $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale, on note la projection stéréographique de pôle Nord alors $f: S^2 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est \mathbb{C}^∞ .

Application: Théorème de D'Alembert (DVPIT)

théorème 1: Extrema liés (DVPIT)

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathbb{C}^2 et M sous variété \mathbb{C}^∞ de \mathbb{R}^m définie par $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ où $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ submersion \mathbb{C}^∞ .

Si $f|_M$ admet un extremum relatif en $a \in M$ alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a)$.

def 7: Soient M et N deux sous variétés et $f: M \rightarrow N$ \mathbb{C}^k . Soient (U, φ) et (V, ψ) des cartes de M et N telles que $x \in U$ et $f(x) \in V$. L'application linéaire tangente en $x \in M$ notée $T_x f$ est l'application linéaire T_x :

$$T_x \cap T_x f \rightarrow T_{f(x)} N$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$[d\phi(a)]^T \quad \downarrow \quad [d\psi(a)]^T \quad \text{commute}$$

$$\mathbb{R}^p \quad \downarrow \quad \mathbb{R}^q$$

$$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

III Géométrie sur les sous-variétés

1) Première forme fondamentale:

def 8: Soit Π une sous variété de \mathbb{R}^m paramétrisée par (U, φ) , et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$. Alors le produit scalaire de \mathbb{R}^m induit un produit scalaire sur $T_x \Pi$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$. La première forme fondamentale est en x :

$I_x: T_x \Pi \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{x}' \mapsto \langle \vec{x}', \vec{x}' \rangle_x$

ex pratique: $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(U, \varphi) \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$
 $T_x(\Pi) = \text{Vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) \right)_{0 \leq i < m}$

On note $g_{ij}(a) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a) \right)_x$.

exemple 7: Π^2 paramétrisée par $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que $\forall (u, v) \in D$
 $\varphi(u, v) = (a + r \cos u) e^{i v}$, $(a + r \cos u) \sin v$, $r \sin u$.

$E = g_{11} = r^2$; $F = g_{12} = g_{21} = 0$; $G = g_{22} = (r \cos u + a)^2$.

2) Calcul d'Aire et Volume:

def 9: Avec les notations de def 8, soit $R \subset \Pi$, ouvert connexe de fermeture compacte tels que $R \subset \varphi(U)$ alors on définit

$\text{vol}(R) = \int_R \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_m$

exemple 8: pour le tore T^2 :

$\sqrt{EG - F^2} = r^2 (1 - \cos^2 u)$

$\mathcal{A}(T^2) = 4\pi^2 r a$.

pour une surface définie par un graphe $(x, y, z(x, y))$ l'aire d'une région R est donnée par $\mathcal{A}(R) = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ où Q est la projection normale de R sur le plan (x, y) .

Références:

- Lafontaine: Introduction aux variétés différentielles (major partie) div. l'appendice sur d'Alembert).
- Jannard Exel: Thème d'Analyse pour l'age: Calcul diff } exemples
- Rouvière
- De Carmo: Differential geometry of curves & surfaces. (partie III).
- Gordon analyse: (extrema liés) & & &

• forme explicite de la projection stéréographique?

$$\Phi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto (??)$$

↳ cartésien

$$M = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

$$N = (0, 0, 1) \quad (MN) \cap \{z = 0\} = \Phi(M)$$

- Plan π à la sphère!
- à quoi sert la 1^{ère} forme fondamentale (calculer la longueur d'un arc).

Autres dup possibles

- Th de Von Neumann: G sq fermé de $GL_n(\mathbb{R})$
- G est une sous-variété [GT] ou [HT]
- \mathbb{R}^k si $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est C^1 (au sens du plan) et M^n fermé, $\exists F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k): f = F|_M$.

$$M^n = \text{surde}$$

$$M^n$$

On peut parler de courbure: courbure de Gauss, tenseur de courbure, courbure de Ricci ...

• géodésiques