214

Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites

Cadre : $\mathbb{R}^n$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$

I Théorèmes d'inversion [ROU]

1. Théorème d'inversion locale

Théorème : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose $Df(a)$ inversible. Alors il existe V ouvert contenant a et W ouvert contenant $f(a)$ tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.

2. Théorème des fonctions implicites

Théorème : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$
$f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ est inversible.
Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$, et une unique application $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus $D_y f(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$.

3. Théorèmes d'inversion globale

Théorème (inversion globale) : On suppose f injective sur U, de classe $\mathcal{C}^1$ et $Df(x)$ inversible, $\forall x \in U$.

Théorème (1 Hadamard Lévy) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
ii) f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible [Z Q]

$f^{-1}(K)$ c$^{\text{act}}$ et K c

4. Généralisation en dimension finie

Théorème (rang constant) : Si Df est de rang constant r, alors il existe U_a voisinage de a ouvert, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V_{f(a)}$ voisinage de $f(a)$ ouvert, W ouvert de $\mathbb{R}^m$, $\varphi : U_a \to V$ et $\psi : V_{f(a)} \to W$ deux $\mathcal{C}^1$ difféomorphismes tel que

$$\forall x \in V,\ \psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

5. Application en intégration

Formule (changement de variables) : Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $K : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ et $f \in L^1(V)$.
On a $\displaystyle\int_V f(y)\,dy = \int_U f(K(x))\,|\det DK(x)|\,dx$

II Applications à la géométrie différentielle [ROU]

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition : Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}$.
On dit que V est lisse en a, de dimension d, s'il existe un difféomorphisme F de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur $F(U)$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en un sous-espace vectoriel de dimension d :

$$F(V \cap U) = V' \cap F(U) \quad \text{avec } V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse en tout point.

Théorème des sous-variétés : Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

ii) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$(x \in V \cap U) \Leftrightarrow (x \in U$ et $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad, \forall i = 1, \dots, n-d)$

et les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_{n-d}(a)$ sont indépendantes

iii) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert U' de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fonctions $g_i : U' \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(x \in V \cap U) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in U' \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d), \dots, x_n = g_{n-d}(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

iv) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et n fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$\varphi : u = (u_1, \dots, u_d) \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$ avec $a = \varphi(0)$ et $D\varphi(0)$ injective.

2. Espaces tangents

Définition : Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent en a à V s'il existe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

L'ensemble des vecteurs tangents en a est l'espace tangent en a à V

3. Changement de coordonnées locales

Lemme (Morse) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, $0 \in U$.

On suppose $Df(0) = 0$, $D^2 f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$

Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0, telle que $\varphi(0) = 0$ et, si $u = \varphi(x)$,

$$f(x) = f(0) + u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 .$$

4. Application à des groupes matriciels [ROU p.268]

On note $SL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det M = 1 \}$

$O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t M M = I \}$

Théorème : $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$D\det(X).H = Tr({}^t \tilde{X} H)$ où $\tilde{X}$ est la comatrice de X

Application : • $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$, de dimension n^2-1.

Son espace tangent en X, $T_{e X}$, est l'ensemble des H tels que $Tr(X^{-1}H) = 0$

En I : $T_{e I}(SL_n(\mathbb{R})) = \{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / Tr(X) = 0 \}$

• $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

et $T_{e X}(O_n(\mathbb{R})) = \{ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H \}$.

5. Exponentielle.

Propriété : On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\det e^{tA} = e^{t Tr A}$

$\exp^{-1} : SL_n(\mathbb{R}) \to T_I(SL_n(\mathbb{R}))$ est une carte adaptée en I

Propriété : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

6. Application aux calculs de variations [GOU.A]

Théorème (Extrema liés) : Soient $f, g_1, \dots, g_k$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $A = \{ x \in U, g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0 \}$.

Si la restriction de f à A présente un extremum au point a de A si $Dg_1(a), \dots, Dg_k(a)$ sont linéairement indépendants alors il existe k réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dg_i(a)$.

Application (Inégalité de Hadamard) : Si $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique, $\forall m \in GL_n(\mathbb{R})$, $|\det m| \le \prod_{i=1}^{n} |m(e_i)|$

2. Résultats géométriques [GON-TOS]

Lemme (Milnor) : Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de K, $v : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et v_t, $t \in \mathbb{R}$, la fonction définie pour tout $x \in U$ par $v_t(x) = x + tv(x)$.
Alors $t \mapsto \int_K \det(Dv_t(x))\,dx$, $\forall t \in \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale

Théorème (Boule chevelue) : On note S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^n$
$\{\forall f : S^n \to S^n$ C^1, telle que $\forall x \in S^n$, $\langle f(x), x\rangle = 0$, f s'annule$\}$ si et seulement si n est pair

Théorème (Brouwer) : Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to D$ une application continue. Alors f a un point fixe dans D.

III Application aux fonctions holomorphes [AMAR-MATHERON]

Théorème (inversion locale) : Soit f une fonction holomorphe sur Ω ouvert voisinage de 0. On suppose $f'(0) \neq 0$. Alors il existe g holomorphe sur U voisinage de 0 telle que $f \circ g(z) = g \circ f(z) = z$ pour z dans U.

Théorème (application ouverte) : Si f est holomorphe non constante sur un ouvert connexe Ω alors $f(\Omega)$ est ouvert.

Principe du maximum : Soit Ω un ouvert connexe, U un ouvert de Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si la restriction de $|f|$ à U admet un maximum alors f est constante sur Ω.

Théorème (D'Alembert, Gauss) : Si $P(z) = a_0 + \dots + a_d z^d$ est un polynôme de degré $d \geq 1$ alors P s'annule.