

degen 236: ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES METHODES DE CALCUL D'INTEGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES REELLES.

I. METHODES ELEMENTAIRES POUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

① Utilisation du calcul de primitives.

Ex1: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

Ex2: décomposition en éléments simples.

$\int \frac{dt}{t^4 - t^2 - 2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \log \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| - \frac{1}{3} \arctan t + k, k \in \mathbb{R}$

Ex3: $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) - F(0)$ avec $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ sur $]0,1[$

② Utilisation d'intégration par parties.

Ex1: $\int \log t dt = t \log t - t + k, k \in \mathbb{R}$

Ex2: Intégrales de Wallis

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. On a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ($n \in \mathbb{N}$)
 ce qui donne:
 $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{2^p (2p-2) \dots 2} \pi$ et $I_{2p+1} = \frac{2^p (2p-2) \dots 2}{(2p+1)(2p-1) \dots 1} \cdot 2$ ($p \in \mathbb{N}$)

Ex3: Fct Γ et fonction Bêta

on rappelle que la fonction Bêta est donnée par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ ($x,y > 0$)
 Alors $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ et $\forall x,y > 0, B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$

Ex4: Calcul de variance

Si X var telle que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $V(X) = 1$.

③ Utilisation du changement de variable

Ex1: Fonction Γ et fonction Bêta

df l'ordre de la relation $B(x,y) = B(y,x)$ ($\forall x,y > 0$) et de l'intégrale $I_n(x) = \int_0^1 (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$, on montre que:

$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x m!}{x(x+1) \dots (x+m)}$

Ex2: Règle de Brèche: calcul de $\int R(\cos t, \sin t) dt$ où $R \in \mathbb{R}(X,Y)$

- \bullet si $R(\cos t, \sin t) dt$ inchange par $t \mapsto \pi - t$ poser $x = \sin t$
- \bullet si $R(\cos t, \sin t) dt$ inchange par $t \mapsto -t$ poser $x = \cos t$
- \bullet sinon poser $x = \tan \frac{t}{2}$

↳ Appl: $\int \frac{dt}{\sin t} = \log \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) \right| + k$

$\bullet \int \frac{\sin^2 t dt}{1 + \cos t} = \cos t - 2 \arctan(\cos t) + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Ex3: Intégrales abéliennes: calcul de $\int R(t, \sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}) dt$, $ad-bc \neq 0, R \in \mathbb{R}(X,Y)$

on pose $x = \sqrt{\frac{at+b}{ct+d}}$

↳ Appl: $\int x \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} dx = \left(\frac{2x-5}{4} \right) \sqrt{x^2-x-2} + \frac{3}{8} \log(2|x^2-x-2| + 2x-1) + k$

④ Utilisation d'une intégrale associée

Ex: Intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t) dt$ En posant

$u = \frac{\pi}{2} - t$, on a $\int_0^{\pi/4} \log(\cos t) dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin t) dt$

ce qui donne $I = \frac{\pi \log 2}{2} + 2I$ d'où: $I = -\frac{\pi \log 2}{2}$

II. UTILISATION DE L'ANALYSE COMPLEXE (FONCTIONS D'UNE VARIABLE)

① Utilisation du prolongement analytique.

Ex: Transformée de Fourier de la Gaussienne

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par:

$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx, t \in \mathbb{R}$

↳ Appl: $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \hat{f}(t) = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$

② Utilisation du théorème des Résidus.

Ex₁: Intégrales du type $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$, $R \in \mathbb{C}(X, Y)$ sans pôles sur $\mathbb{C}(0, 1)$



on pose $z = e^{it}$ et on intègre sur $\mathbb{C}(0, 1)$

$$\hookrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad a \in \mathbb{R}, a > 1$$

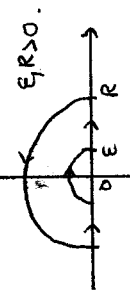
Ex₂: Intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} R(z) dz$, $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ sans pôles réels tel que



lim_{|z|→∞} zR(z) = 0. On intègre sur:}

$$\hookrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3} \quad R > 0$$

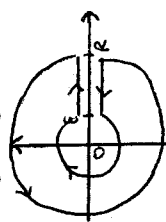
Ex₃: Intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it} dt$ où $f(z)$ holomorphe sur $\{ \text{Im} z > 0 \}$ sauf peut-être en un nombre fini de points



on intègre sur:

$$\hookrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \varepsilon, R > 0$$

Ex₄: Intégrales du type $\int_0^{+\infty} \frac{R(t)}{t^a} dt$ avec $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $R(z) \in \mathbb{C}(z)$ sans pôles sur le demi-axe réel $x > 0$ et tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$.



$$\hookrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{on intègre sur:}$$

Application: $\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ (formule des compléments)

III. AUTRES METHODES POUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

① Utilisation des suites et des séries

Ex₁: Intégrale de Dirichlet

On écrit $I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \log(1 - \cos t) dt$ et on développe le logarithme en série entière au voisinage de 1.

Ex₂: Sommes de Riemann

$\forall \rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ $I(\rho) = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2) d\theta$.
• si $|\rho| < 1$ alors $I(\rho) = 0$

• si $|\rho| > 1$ alors $I(\rho) = 2\pi \log |\rho|$.

Ex₃: convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}$$

• Soit X_n pour telle que $X_n \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $S_n \xrightarrow{PS} S$ et $\mathbb{E}(e^{itS}) = e^{-\frac{1}{3}|t|}$ ie $S \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$

Ex₄: Théorème de Hardy

Soit $\sum_{n \geq 0} c_n$ une série numérique convergente. Alors $-g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \sum_{n \geq 0} c_n \frac{t^n}{m!}$ est bien définie.

De plus, g est C^∞ sur \mathbb{R}^+ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t) dt = \sum_{n \geq 0} c_n$.

② Utilisation de la régularité

Ex₁: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt = \log x \quad (x > 0)$

Ex₂: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^{2n-2}}$

Ex₃: transformée de Fourier de la Gaussienne.

Ex₄: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

③ Developpements asymptotiques

Ex: Méthode de Laplace

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b < +\infty$, $\forall \epsilon \in \mathcal{G}^2([a, b], \mathbb{R})$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ e^{-bt_0} $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$

• $f \in C^\infty$ en a , $f(a) \neq 0$.

\hookrightarrow si $\varphi' > 0$ sur $[a, b]$ $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \sim_{+\infty} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{t\varphi'(a)} f(a)$

\hookrightarrow si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$ $\varphi'(a) = 0$ $\varphi''(a) > 0$ $F(t) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)}}{\sqrt{t}}$

[Car] p100

[Car] p102

[Car] p105

[Car] p106

[G] p175

[G] p181 (ou [Kro] p201)

[Br] p319

[AF2] p661

[ZG] p351

[ZG] p319

[ZG] p333

[fam]

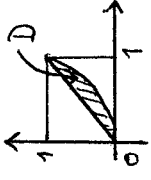
[Row]

↳ Appl: Formule de Stirling:
 $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$
 $x \rightarrow +\infty$

IV. METHODES POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

① Utilisation du théorème de Fubini:

Ex: Calcul d'aires
 $\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{20}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$



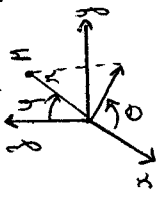
Ex: Transformées de Fourier de la mesure de Cauchy.
 La mesure de Cauchy est la mesure μ de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ qui supporte à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , on a:
 $\int_{\mathbb{R}} e^{itz} \frac{1}{1+x^2} \lambda(dx) = e^{-|t|}$

Ex: calcul d'esperance.
 Soit X une var positive. alors $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt$.

② Utilisation de changement de variables

Ex: en coordonnées polaires:
 $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\varphi(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ avec D compact mesurable de \mathbb{R}^2
 $\varphi(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \in [0, 2\pi]$
 $\varphi(r,\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

en coordonnées sphériques:
 $\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\varphi(D)} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$
 $\varphi(r,\theta,\varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$
 $\begin{cases} r > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$



App: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Intégrale de Fresnel: $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

calcul de volumes: $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz = \pi$
 $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

[Obj] p333

[Obj] p264

[G] p329

[G] p329

[G] p336

[Obj] p124

Ex: en probabilité: Soit (X,Y) un couple de var de densité
 $f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}$

Alors $X+Y \sim \mathcal{N}(0,3)$

③ Utilisation du théorème de Green-Riemann.

Ex: Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord \mathcal{G}^1 et $\alpha = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe \mathcal{G}^1 sur un ouvert contenant K , alors K est mesurable et:

$$\int_{\partial K} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right] dx dy$$

App: Calcul de l'aire d'un compact à bord \mathcal{G}^1 :

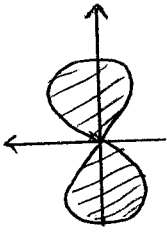
$$A = \iint_K dx dy = \int_{\partial K} x dy = - \int_{\partial K} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial K} (x dy - y dx)$$

En coordonnées polaires: $A = \frac{1}{2} \int_{\partial K} r^2 d\theta$.

Ex: aire de la lemniscate de Bernoulli:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \text{ et } a > 0$$

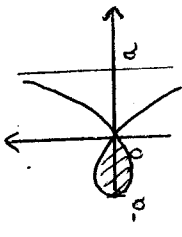
$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos^2 \theta d\theta = a^2$$



Aire de la strophoïde droite

$$r = -a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{a^2}{2} (4 - \pi)$$



Inégalité isopérimétrique:

Soit une courbe régulière, simple, fermée de classe \mathcal{G}^1 . Soit L la longueur totale de cette courbe et S son aire intérieure.
 Alors: $L^2 \geq 4\pi S$

de plus, l'égalité ne se produit que dans le cas du cercle.

[Obj] p317

[G] p332

[G] p336

Références

- Gourdon
- Z
- Cartan.
- Objectif licence - Intégration et probabilités
- Rouviers
- Objectif agrégation.
- Breal analyse NFSI, NP
- Arnaudès 2.
- page perso Florent Nalieu