234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

I - Structure topologique des espaces L^p

On se place sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

1. L'espace $\mathcal{L}^p$ [FAR]

Def 1 Soit $p \in [1;+\infty[$. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f à valeurs complexes telles que $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$

Soit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On note $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Ex 2 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ [BR1]
Alors $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty\}$, noté $\ell^p(\mathbb{N})$

Def 3 Soient $p, p' \in]1;+\infty[$. On dit que p et p' sont conjugués si $1/p + 1/p' = 1$.
Par extension, on dit que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

Prop 4 Soient p, p' deux exposants conjugués dans $]1;+\infty[$, f et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables.
- Inégalité de Hölder : $\int_\Omega |fg| d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$ [LAA]
- Inégalité de Minkowski $\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{1/p}$

Prop 5 Soit $p \in [1;+\infty[$. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.

Def 6 Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable. f est dite essentiellement bornée si $\exists M > 0$ tel que $\mu(\{x, |f(x)| > M\}) = 0$. On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurables essentiellement bornées, et pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on note $\|f\|_\infty$ la borne inférieure des réels M vérifiant la propriété ci-dessus

Prop 7 $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|_\infty$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel.
On peut de plus généraliser l'inégalité de Hölder :
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

2. L'espace L^p

Def 8 Soit $p \in [1;+\infty]$. La relation $f = g$ p.p. est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On note l'espace quotient associé $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. [FAR]

Thm 9 - Théorème de Riesz - Fischer [FAR]
Soit $p \in [1;+\infty]$. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel normé complet pour $\|\cdot\|_p$ noté $L^p(\mu)$

Prop 10 Soient $p, q \in [1;+\infty]$. On suppose que $p \leq q$ et $\mu(\Omega) < +\infty$. [BR1]
Alors $L^q \subset L^p$

Ctre-ex 11 Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ [BR1]
$\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in L^1(\lambda) \setminus L^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in L^2(\lambda) \setminus L^1(\lambda)$
On n'a donc aucune inclusion entre $L^1(\lambda)$ et $L^2(\lambda)$

Prop 12 Soient $p, q \in [1;+\infty[$ tels que $p \leq q$. Alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ [BR1]

3. Convergence dans les espaces L^p [BR1] [OUV]

Thm 13 Soit $p \in [1;+\infty[$. L'ensemble des fonctions continues à support compact $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

Appli 14 Soit $p \in [1;+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $a \in \mathbb{R}$ [LAA] p 196
L'application $\Phi_f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \\ a \mapsto \tau_a f \end{array}$ où $\tau_a f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x-a) \end{array}$
est uniformément continue

Prop 15 Soit $p \in [1;+\infty]$, (f_n) une suite de $L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ tels que $f_n \xrightarrow{L^p} f$
Alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \xrightarrow{p.s.} f$

Ctre-ex 16 Dans $L^p([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \lambda)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$
On pose, pour $n \geq 0$, $k \in [\![0; 2^n - 1]\!]$, $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}]}$
$f_n \xrightarrow{L^p} 0$, mais $\forall x \in [0,1[$, $f_n(x)$ ne converge pas vers 0

Prop 17 Soit (f_n) une suite de $L^p(\mu)$, $p \in [1;+\infty[$, tels que (f_n) converge presque sûrement vers une fonction f. On suppose qu'$\exists g \in L^p(\mu)$ positive telle que $|f_n| \leq g$ p.p.
Alors $f \in L^p(\mu)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Ctre-ex 18 Dans $L^1([0;1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on pose, pour $n \geq 1$, $f_n = n \mathbb{1}_{]0;1/n[}$
$f_n \xrightarrow{p.s.} 0$ mais $\forall n \geq 1$, $\|f_n\|_1 = 1$ [HAU]

On se place ici sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Def 19 Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires. On dit que (X_i) est équiintégrable si $\lim_{a\to+\infty} \sup_{i\in I} \int_{|X_i|>a} |X_i| \, dP = 0$

Prop 20 S'il existe une variable aléatoire positive intégrable X telle que $\forall i \in I$, $|X_i| \leq X$ p.s., alors $(X_i)_{i\in I}$ est équiintégrable.

En particulier, toute famille finie de variables aléatoires intégrables est équiintégrable

Thm 21 Soit $p \geq 1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre p.

(X_n) converge dans L^p ssi la suite $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable et $\exists X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X_n \xrightarrow{p} X$

Ctre-ex 22 Pour $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1-\frac{1}{n})\delta_0$

$X_n \xrightarrow{P} 0$ mais $\forall n \geq 1$, $E(X_n) = n$

II - Utilisation des espaces L^p

On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

1. Produit de convolution [BRE]

Def 23 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que p.p. $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R})$.

Alors on définit $f*g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par : p.p. $x \in \mathbb{R}$, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$

Prop 24 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f*g$ est bien définie.

De plus, $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Ex 25 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{[0;1]} * \mathbb{1}_{[0;1]}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \\ 2-x, & x \in [1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ [BRI]

Prop 26 $(L^1(\mathbb{R}), +, *, .)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative [BRI]

Prop 27 Soient $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $C_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}$ à support compact

Prop 28 Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$

Alors $f*g \in C^k(\mathbb{R})$ et $\forall j \leq k$, $(f*g)^{(j)} = f^{(j)} * g$

En particulier, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$

Def 29 On appelle suite régularisante toute suite (ρ_n) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\mathrm{Supp}\, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n \, d\lambda = 1$, ρ_n positive sur $\mathbb{R}$

Ex 30 On définit ρ par : $\forall x \in]-1;1[$, $\rho(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

$\forall x \notin]-1;1[$, $\rho(x) = 0$

puis, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = C n \rho(nx)$ où $C = \left(\int_{\mathbb{R}} \rho \, d\lambda\right)^{-1}$

Alors (ρ_n) est une suite régularisante.

Prop 31 Soit (ρ_n) une suite régularisante

- Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\rho_n * f$ converge uniformément sur tout compact vers f
- Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, où $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$

Appli 32 $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$

2. Transformation de Fourier [LAA]

Def 33 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f l'application $\hat{f}$ définie par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \, dx$

Ex 34 (i) $f = \mathbb{1}_{[c;d]}$, $\hat{f}(\xi) = \begin{cases} d-c & \text{si } \xi = 0 \\ \frac{\sin[\pi(d-c)\xi]}{\pi\xi} e^{-i\pi(c+d)\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \end{cases}$ $(c, d \in \mathbb{R}, c<d)$

(ii) $f : x \mapsto e^{-a|x|}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$

Prop 35 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

- $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$).
- $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc}(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \to & (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto & \hat{f}\end{array}$ est une application linéaire continue.

Prop 36 Translation / Dilatation

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

- $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-2i\pi a\xi} \hat{f}(\xi)$ où $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$
- $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$

Ex 37 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\varphi : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) \cos(2\pi\alpha\xi)$ p 258

Alors φ est la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x+\alpha) + f(x-\alpha))$

Prop 38 Dérivation

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$, f de classe C^m telle que $\forall k \in [\![0;m]\!]$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\forall k \in [\![1;m]\!]$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$, f telle que $\forall k \in [\![0;m]\!]$, $x \mapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\hat{f}$ est de classe C^m et $\underset{\forall k \in [\![0;m]\!]}{\forall \xi \in \mathbb{R}}$, $\hat{f}^{(k)}(\xi) = (-2i\pi)^k \mathcal{F}(x^k f(x))(\xi)$

Ex 39 Soit $a > 0$, $f : x \mapsto \frac{x^k}{k!} e^{-ax} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$ [GAS]

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}}$

Thm 40 Inversion

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Alors p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\hat{f})(x) = f(-x)$

Ex 41 Soit $a>0$, $f : x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$

Prop 42 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(g)$

3. Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles [LAA]

Thm 43 Cordes vibrantes p 267

Soit u solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in]0;+\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$
$g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g' \in L^1(\mathbb{R})$

Alors $\forall (t,x) \in]0;+\infty[\times \mathbb{R}$, $u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s)\, ds$

Thm 44 Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur p 269

Soit u solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \times]0;+\infty[\\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|\, dx = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$

On suppose que $x \mapsto u(x,y)$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)$, $x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \in L^1(\mathbb{R})$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]0;+\infty[$, $u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{y}{\pi(y^2+(x-s)^2)}\, ds$

4. Prolongement de la transformée de Fourier à L^2 [LAA]

Thm 45 - Théorème de Plancherel

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

Par densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on prolonge ainsi $\mathcal{F}$ en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Ex 46 . Soient $a, b > 0$. $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$ p 291

. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+a^2}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = -i\pi\, \mathrm{sign}(\xi)\, e^{-2\pi a|\xi|}$ p 285

III - Structure particulière de L^2

Thm 47 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert (on reprend les notations du I)

1. Application du théorème de projection en probabilités

Prop Def 48 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. [OUV2]

$L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un sev fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $E^{\mathcal{B}}$ le projecteur orthogonal sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$

Pour $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $E^{\mathcal{B}} Y$ est l'unique $U \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tel que $\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $E(ZY) = E(ZU)$, et est appelée espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$.

2. Application du théorème de représentation de Riesz

Thm 49 - Dualité dans les L^p [ZQ]

Soit $p \in [1;+\infty[$. L'application $\varphi : L^{p'}([0;1]) \to \left(L^p([0;1])\right)'$
$g \mapsto L_g$

où $L_g : L^p([0;1]) \to \mathbb{C}$
$f \mapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

est une isométrie linéaire surjective

p 132 [RUD]

Appli 50 A tout homomorphisme complexe (forme linéaire qui conserve la multiplication) φ non identiquement nul de l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ correspond un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = \hat{f}(t)$

3. Application aux séries de Fourier [CoA]

Def 51 Soit $f \in L^1([0;2\pi])$. On note, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$ $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{inx}$

et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{|n| \le N} c_n e_n$ $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

Thm 52 - Théorème de Fejer

. Si f est continue, alors $\sigma_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Si $f \in L^p([0;2\pi])$, $1 \le p < +\infty$, alors $\sigma_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Appli 53 $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0;2\pi])$

Soit $f \in L^2([0;2\pi])$, $S_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$

Références

Principalement

- Laamri ; Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions
- Brézis : Analyse fonctionnelle
- Faraut : Calcul intégral
- Briane - Pagès : Théorie de l'intégration

Et aussi

- Ouvrard : Probabilités T2
- Beck - Malick - Peyré : Objectif Agrégation
- Gasquet - Witomski : Analyse de Fourier et applications
- Hauchecorne : Les contre-exemples en mathématiques
- Zuily - Queffélec : Analyse pour l'agrégation
- Rudin : Analyse réelle et complexe

blablabla...

- $\exists$? des fonctions pas mesurables sur $[0,1]$? (avec la tribu borélienne) — voir ds un livre d'intégra°.

[vitali]

un ensemble non mesurable ?

R. rela° d'eq $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Soit $T \subset \mathbb{R}$ tq $\mathbb{R} = \bigsqcup_{t \in T} t\mathbb{Q}$ (choix de représentants)

L'existence de T est assuré par l'axiome du choix

Alors $T \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [RUD] et alors $\mathbb{1}_T$ n'est pas mesurable.

- Inégalité de Hardy (exo classique) $p \in]1, \infty[$ $\mathbb{R}^+$

f positive continue à supp K. $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

mq $Tf \in L^p$

et $\boxed{\|Tf\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p}$ $\forall f \in L^p$. [ACL]

$F = Tf$

$$|Tf(x)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right| \le \frac{1}{x}\|f\|_1 \in L^p \text{ pour } p > 1$$

$$xF(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$F(x) + xF'(x) = f(x) \qquad F(x) = f(x) - xF'(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} F^p(x)\,dx = \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}(f(x) - xF'(x))\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} F^{p-1}f - \int x\underbrace{F^{p-1}F'}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} F^{p-1}f - \left(\left[\frac{F^p}{p}x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty}\frac{F^p}{p}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} F^{p-1}f + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^+} F^p$$

$$\|F\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^+} F^p = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} F^{p-1}f \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p \|F^{p-1}\|_q$$

$$= \frac{p}{p-1}\|f\|_p \|F\|_p^{p/q}$$ et là on y est.