233

Espaces L^p $\quad 1 \leq p \leq \infty$

I) Généralités

A) Définitions et premières propriétés

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure ≥ 0

<u>def</u>: Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable et $1 \leq p < \infty$ on dit que $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ssi $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$

si $p = +\infty$ on dit que $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu\{x \in X / f(x) > M\} = 0$

<u>def</u>: on pose $\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}$ si $p \neq \infty$.

$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 \,/\, \text{pour } \mu\text{-presque tout } x,\ |f(x)| \leq c\}$

c'est le supessentiel de f pour $p = \infty$

<u>def des espaces $L^p(X)$</u>:

pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/_{\mathcal{R}}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par: $f \mathcal{R} f' \Leftrightarrow \|f - f'\|_p = 0$

<u>expl</u>: $X = \mathbb{Z}$, μ mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$

$L^p(\mathbb{Z}) = \ell^p(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,/\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p < +\infty\}$

Inégalité de Hölder

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors $fg \in L^1$ et

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Inégalité de Minkowski: soit $f, g \in L^p$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

<u>Th</u>: $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé

<u>Th</u>: $L^p(X)$ est complet

si $p = 2$ $\quad L^p(X)$ est un Hilbert

<u>Prop</u>: Soit $(f_n) \in L^p(X)$ tel que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$

Alors $\exists (n_k)$ tel que $f_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} f$

<u>Rq</u>: Si $1 \leq p < \infty$ $\quad X = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ = mesure de Lebesgue

$L^p(\Omega)$ est le complété de $(\mathcal{C}_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$

<u>Appl° du Th</u>:

Soit $1 \leq p < \infty$, μ = une probabilité.

Soit S un sous espace fermé de $L^p(X)$ tel que $S \subset L^\infty(X)$

Alors S est de dimension finie.

B) Inclusion entre les espaces L^p

<u>Prop</u>: pour tout $q \leq r \in [1; +\infty]$, on a: $L^q \cap L^r \subset \bigcap_{q \leq p \leq r} L^p$

et pour tout $f \in L^q \cap L^\infty$, $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

En probabilité si μ = mesure de probabilité

<u>Prop</u>: pour $1 \leq p \leq q$ la convergence en norme L^q implique la convergence en norme L^p

on a de plus : $L^\infty \hookrightarrow L^q \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^1$

<u>Prop</u>: La convergence en norme L^p entraine la convergence en probabilité

II) Propriétés d'analyse fonctionnelle

Dans ce paragraphe $X = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ $\wedge$ μ mesure de Lebesgue

A) Densité et convolution

Th: L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Applications :

1) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\Phi_f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ a \longmapsto \tau_a f = f(\cdot - a) \end{cases}$ est uniformément continue

2) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$
$p, p' \in [1; +\infty]$ alors $f * g$ est uniformément continue et bornée

et on a $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

si de plus $p, p' \in]1; +\infty[$, $\lim_{|x| \to +\infty} (f * g)(x) = 0$

Th: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$
alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Conséquence : $L^1(\mathbb{R}^n)$ a une structure d'algèbre quand on le munit de $+$ et $*$ (mais sans élément neutre)

Prop: Soit (ρ_n) une suite régularisante et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$
Alors $\rho_n * f \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f$

Conséquences :

1) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = 0$
Alors $f = 0$ pp

2) $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

applications de ce dernier fait : 1) Inégalité de Hardy

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ $\quad Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

Si $1 < p < \infty$ on a $\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$

2) $L^p(\Omega)$ est séparable $1 \leq p < \infty$

Rq: $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable

B) Dualité

Th: $\begin{cases} L^{p'} \longrightarrow (L^p)' \\ f \longmapsto \int_\Omega f\varphi \end{cases}$ est une isométrie

si $p \neq +\infty$ c'est une isométrie surjective

Application :

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne
Alors il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt + f(0)$

Conséquences du th : $L^p(\Omega)$ est réflexif si $p \neq 1, \infty$

Rq : $(L^\infty(\Omega))' \not\hookleftarrow L^1(\Omega)$

III) Etude de L^1 et L^2

A) $L^1(\mathbb{R})$

Rappel sur la transformation de Fourier

def: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ on appelle transformé de Fourier de f la fonction $\hat{f}$ définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i 2\pi x t}\,dx$

Th: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Application : Spectre de $L^1(\mathbb{R})$

Th : Soit $\varphi : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ homomorphisme d'algèbre. Alors il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\varphi(f) = \hat{f}(t) \text{ pour tout } f \in L^1(\mathbb{R})$$

B) Étude de L^2

Prop : L^2 est un Hilbert pour le produit scalaire
$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g}\, d\mu$$

Les propriétés hilbertiennes de L^2 permettent de

* prolonger la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$:

Th de Plancherel :

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ il existe une unique fonction $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :

i) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f

iii) $\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & \hat{f} \\ L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert

iv) Soit $A > 0$ on définit $\begin{cases} \varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i2\pi x t} dx \\ \psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t) e^{2i\pi x t} dt \end{cases}$

on a alors $\begin{cases} \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \\ \|f - \psi_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \end{cases}$

Shannon / Bergmann

* définir l'espérance conditionnelle sur $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé

déf - prop : Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, soit X une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors il existe une unique variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}$ $\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_B X\, d\mathbb{P}$

Base hilbertienne :

On sait que si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2 alors $\forall f \in L^2$, $f \underset{L^2}{=} \sum_{n\geq 0} \langle f | e_n \rangle e_n$

Expl : . $(e^{2i\pi n x})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ avec $\langle f | e_n \rangle = \hat{f}(n)$ si $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit ω une fonction poids $\begin{pmatrix} \omega > 0 \\ \omega \in \mathcal{C}^0(I) \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \omega(x)\,dx < +\infty)$

On note P_n la famille de polynômes orthogonaux pour ω. Si I est bornée ou (si $I = \mathbb{R}$ et $\exists \alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\omega(x)\,dx < +\infty$) alors $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|_2}\right)$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \omega dx)$

Application : fonctions de Hermite.

soit (H_n) les polynômes orthogonaux pour $\omega : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto e^{-x^2} \end{array}$

les fct° $h_n(x) = \dfrac{H_n(x)\, e^{-x^2/2}}{(n!\, 2^n \sqrt{\pi})^{1/2}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ et sont les fonctions propres de la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

$\hat{h}_n = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n h_n$

(noter autre)

IV) Espace de Sobolev 1D

Motivation : $f \in \mathcal{C}([0,1])$ donnée, on cherche à résoudre

$$(P) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution de ce problème, alors

$$(PV) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(]0,1[), \quad \int_0^1 u'\varphi' dx + \int_0^1 u\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx$$

Déf : $H^1(0,1) = \{ u \in L^2(0,1) / \exists g \in L^2(0,1)$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(0,1), \int_0^1 u\varphi' dx = -\int_0^1 g\varphi dx \}$

et on note alors $g = u'$

Prop : . Muni du produit scalaire $\langle u,v \rangle_{H^1} = \langle u,v \rangle_{L^2} + \langle u',v' \rangle_{L^2}$

$H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert.

- Si $u \in H^1(0,1)$ alors u a un représentant continu.
- $H^1_0(0,1) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\mathcal{C}^1_c(]0,1[)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = \{ u \in H^1(0,1) / u(0) = u(1) = 0 \}$.

Conséquence . Si $f \in L^2$, (PV) a une unique solution $u \in H^1_0(0,1)$

. Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors la solution u de (PV) est de classe $\mathcal{C}^2([0,1])$ et est solution de (P)

Développements :

* $L^p(X)$ est complet
* Dualité : soit $(L^p)' \simeq L^{(p')}$ pour $1 < p \leq 2$ et $\Omega =]0,1[$ [ZQ]
  soit le truc sur les fcts lipschitziennes.
* Sous-espaces fermés des L^p

Inég. de Young

Fejér

Th. de Wiener (série fourier de $\frac{1}{f}$)

(équa. chaleur)

Références :

Rudin : Analyse réelle et complexe
Analyse fonctionnelle

Brézis

Hirsch Lacombe

Annae Matheron

ajouter Riesz + TCL, LFGN.

~~[illegible]~~