220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

Position du problème : on s'intéresse à l'équation différentielle (*) $X' = f(t, X)$, où $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, U ouvert

Définition : une *solution* de (*) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dérivable, telle que $\forall t \in I$, $(t, X(t)) \in U$ et $f(t, X(t)) = X'(t)$.

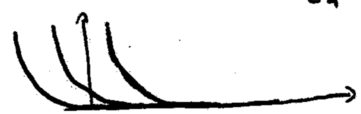
I - Théorèmes d'existence et d'unicité

1 - Existence locale

Théorème (Cauchy-Peano) : si f est continue sur U, alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage I de t_0 et une solution X de (*) sur I telle que $X(t_0) = x_0$.

Exemple (vidange d'une baignoire) : $X' = -\sqrt{X}$

Solutions : $X(t) = \left[\frac{1}{4}(t-a)^2\right]^+$, $a \in \mathbb{R}$.



Remarque : pour $x_0 = 0$, il y a plusieurs solutions au problème de Cauchy (si la baignoire est vide, on ne sait pas depuis quand)

2 - Existence et unicité

Définition : une solution X sur I est *maximale* s'il n'existe pas de $J \supsetneq I$ et $\tilde{X} : J \to \mathbb{R}^n$ prolongeant X tels que $\tilde{X}$ soit solution sur J.

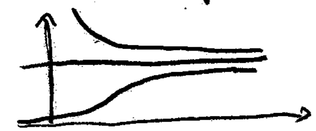
Théorème : toute solution se prolonge en une solution maximale.

Théorème (Cauchy-Lipschitz). Si f est continue sur U, et localement lipschitzienne par rapport à X (ie $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists V \in \mathcal{V}(t_0)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists K > 0$, $\forall t \in V$, $\forall x, y \in W$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq K \|x - y\|$).

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale X telle que $X(t_0) = x_0$.

Contre-exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0, ce qui explique la non unicité dans la vidange de la baignoire.

Exemple : équation logistique $x' = (1-x)x$.



3 - Existence globale

On suppose ici que $U = J \times \Omega$, J intervalle ouvert, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition : une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Proposition : soit X une solution maximale sur un intervalle I. Alors I est ouvert ; si l'on note $I =]\alpha, \beta[$, alors soit X est globale ($I = J$), soit $(t, X(t))$ sort de tout compact de U lorsque t tend vers α ou β.

Exemple : l'équation $X' = X^2$ n'admet pas de solution globale autre que 0, car ses solutions tendent vers $\pm\infty$ en temps fini.

II - Représentations graphiques des solutions.

1 - Champs de vecteurs ; graphes des solutions ; isoclines

Un *champ de vecteurs* associé à l'équation $X' = f(t, X)$ est un champ dont le vecteur en (t, x) est dirigé par $(1, f(t, x))$.

Si X est une solution, son graphe est tangent en tout point au champ de vecteurs. Dessiner le champ de vecteurs permet donc de se faire une idée du graphe des solutions.

Exemple : $X' = -tX$. Voir figure 1.

Remarquons que si l'on est dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, les graphes des différentes solutions ne se coupent pas ; en outre, par chaque point de $\mathbb{R}^{n+1}$ passe un graphe.

Définition. On appelle *isoclines* les ensembles $\{(t,x),\ f(t,x) = c\}$, où c parcourt $\mathbb{R}^n$.

Le tracé des isoclines permet lui aussi de se donner une idée de l'allure du graphe. Voir figure 2.

2- Espace des phases

Définition : si X est une solution, sa *trajectoire* dans l'*espace des phases* est la courbe paramétrée définie par X dans $\mathbb{R}^n$.

Si l'on est dans les conditions de Cauchy-Lipschitz et que l'équation est autonome, les trajectoires des différentes solutions ne se coupent pas.

Exemple 1. (pendule). Le pendule sans frottement est régi par l'équation $\theta'' + \sin\theta = 0$. On se ramène à un système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' + \sin\theta = 0 \end{cases}$$

Voir figure 3.

Exemple 2. (Lotka-Volterra). On modélise un système proies (x) - prédateurs (y) par :

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + xy \end{cases}$$

Voir figure 4. On constate la périodicité des solutions. (pour $x(0)>0$ et $y(0)>0$)

III - Étude asymptotique

Dans cette partie, on suppose que l'équation est autonome. ~~[illegible]~~

On suppose en outre que l'on est dans les conditions de Cauchy-Lipschitz.

1- Stabilité : définitions.

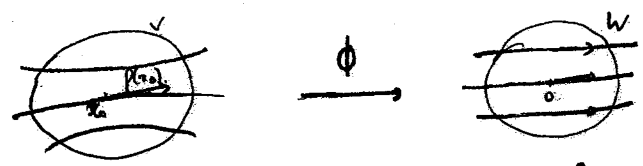
Définition : soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

* On dit que x_0 est un point stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq pour toute solution X, si $\exists t_0$ tq $|X(t_0) - x_0| < \delta$, alors $\forall t \geq t_0$, $X(t)$ est défini et $|X(t) - x_0| \leq \varepsilon$.
* On dit que x_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et si $\exists \delta > 0$, pour toute solution X, si $\exists t_0$ tq $|X(t_0) - x_0| < \delta$, alors $\forall t \geq t_0$, $X(t)$ est défini et $X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$.
* Si x_0 n'est pas stable, on dit qu'il est instable.

2- Points critiques, théorème de redressement des flots

Définition : on dit que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un point critique si $f(x_0) = 0$.

Théorème (redressement des flots) : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et si x_0 n'est pas un point critique, alors il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $W \in \mathcal{V}(0)$, et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : V \to W$ tels que $\forall x \in V$, $d\phi(x).f(x) = (1, 0, \dots, 0)$.



En particulier, si f est $\mathcal{C}^1$, il suffit d'étudier la stabilité des points critiques.

3. Exemples d'études de points critiques

Exemple 1 : pendule sans frottement.

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' + \sin\theta = 0 \end{cases}$$

On a $f(\theta, y) = (y, -\sin\theta)$

Points critiques : $f(\theta, y) = 0 \iff y = 0$ et $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

* Les points critiques $y=0$, $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ sont stables (non asymptotiquement stables).
* les points critiques $y=0$, $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ sont instables.

Exemple 2 : pendule avec frottement.

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -\sin\theta - k.y \end{cases} \qquad k>0$$

$f(\theta, y) = (y, -\sin\theta - k.y)$.

Points critiques : $y=0$ et $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

* les points $y=0$, $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ sont, cette fois, asymptotiquement stables.
* les points $y=0$, $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ sont toujours instables.

Exemple 3 : Lotka-Volterra.

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + xy \end{cases}$$

$f(x,y) = (x - xy, -y + xy)$

Points critiques : on ne s'intéresse pas aux solutions $x=0$ ou $y=0$. Le point critique restant à étudier est alors $(1,1)$.

Il est stable, mais non asymptotiquement stable.

La stabilité des points critiques se lit sur les portraits de phase.

stable — asympt stable — instable

IV - Cas des systèmes linéaires $X' = A.X$

Théorème : On s'intéresse au système $X' = A.X$ $(A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

* 0 est asymptotiquement stable si, et seulement si, $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, $Re(\lambda) < 0$
* 0 est stable si, et seulement si, $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$, ou bien $Re(\lambda)<0$, ou bien $Re(\lambda)=0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

Exemple : classification en dimension 2. Voir les portraits de phase sur la figure 5.

Sous certaines conditions, le comportement d'une équation différentielle $X' = f(X)$ (f de classe $\mathcal{C}^1$, $f(0)=0$) en 0 est le même que celui du système linéarisé $X' = Df(0).X$.

Plus précisément :

Théorème (Lyapunov) :
- Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est asymptotiquement stable pour le système $X' = f(X)$.
- Si $Df(0)$ a une valeur propre de partie réelle >0, alors 0 est instable.

Exemple : pendule avec frottement.

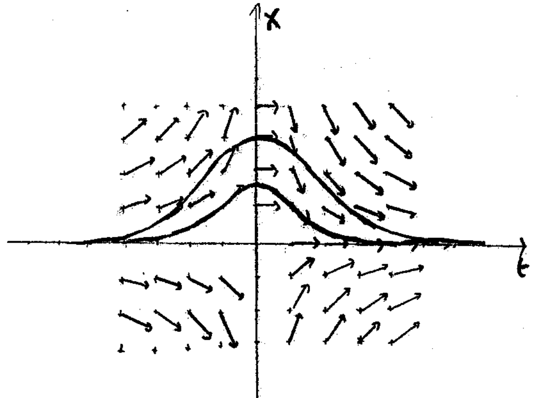
$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -\sin\theta - ky \end{cases} \quad \text{Au voisinage de } 0\text{, le linéarisé est :} \quad \begin{cases} \theta' = y \\ y' = -\theta - ky \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$; si $k<2$: $\lambda_1 = -\frac{k}{2} + i\frac{\sqrt{4-k^2}}{2} = \overline{\lambda_2}$

si $k \geq 2$: $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2-4}}{2}$

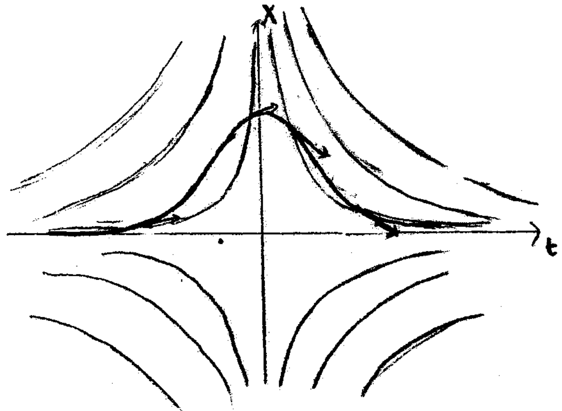
Dans les deux cas, les valeurs propres sont de partie réelle <0.

Remarque : si $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(Df(0))$, $Re\lambda \leq 0$ et $\exists \lambda$ tq $Re\lambda = 0$, on ne peut rien dire. Exemple : $\begin{cases} x' = \alpha x^3 \\ y' = \beta y^3 \end{cases}$. Le linéarisé $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$ est stable, mais le système est asympt. stable si $\alpha<0$ et $\beta<0$, instable si $\alpha>0$ et $\beta>0$.



$\boxed{X' = -t.X}$

Figure 1



Les isoclines de $X' = -tX$ sont les hyperboles équilatères.

Figure 2.

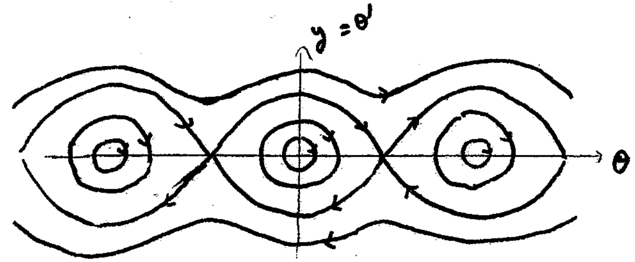


Figure 3 (pendule sans frottements)

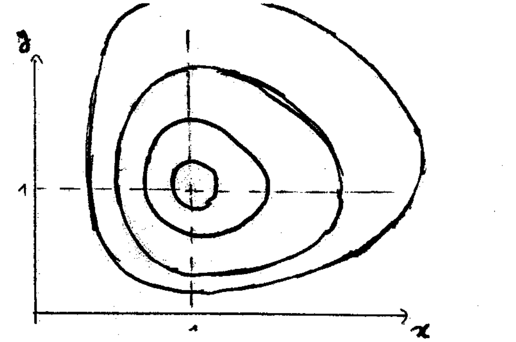
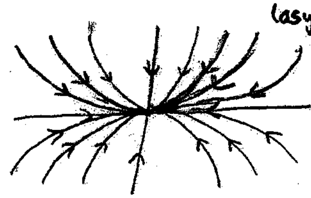


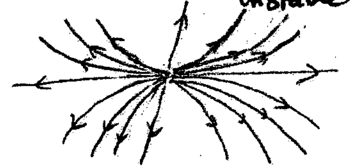
Figure 4 (modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra)

2 valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2$

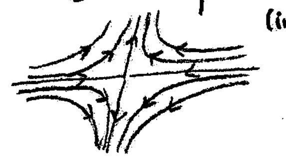
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ noeud impropre stable (asympt. stable)



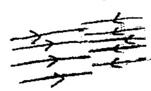
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ noeud impropre instable



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ point selle (instable)

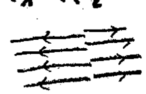


$0 = \lambda_1 < \lambda_2$



(stable)

$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$



(instable)

1 valeur propre double λ

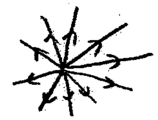
A diagonalisable :

$\lambda = 0$

(stable)

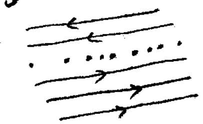
$\lambda < 0$ noeud propre stable (asympt. stable)

$\lambda > 0$ noeud propre instable

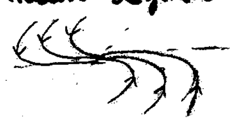


A non diagonalisable :

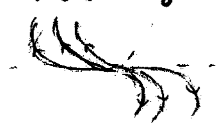
$\lambda = 0$ (instable)



$\lambda < 0$ (asympt. stable) noeud dégénéré stable

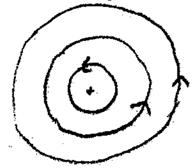


$\lambda > 0$: noeud dégénéré instable



2 valeurs propres complexes conjuguées $\lambda, \bar{\lambda}$ avec $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

$\alpha = 0$ centre (stable)



$\alpha < 0$ foyer stable (asympt. stable)

$\alpha > 0$ foyer instable