202 EXEMPLES DE PARTIES DENSES ET APPLICATIONS

Cadre : notions de topologie supposées connues.

Introduction

[Gou p10]

Déf : (E,d) espace métrique, une partie A de E est dense si $\bar{A}=E$.

Prop : A est dense dans E ssi $\forall x \in E\ \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $d(x_n,x) \xrightarrow[n]{} 0$.

Th : il existe un prolongement isométrique $u : (E,d) \to (\hat{E},\hat{d})$ où $(\hat{E},\hat{d})$ espace métrique complet tq $u(E)$ dense dans $(\hat{E},\hat{d})$. [Lel p34]

Déf : $(\hat{E},\hat{d})$ est appelé complété de (E,d).

Ex : on appelle $\mathbb{R}$ le complété de $\mathbb{Q}$.

I) Exemples dans $\mathbb{R}$.

Prop : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Appl : → les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ sont les $x \mapsto ax$
→ le seul automorphisme du corps $\mathbb{R}$ est id [Lei p9]
→ résolution d'équations fonctionnelles : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tq $f(xy) = x f(y) + f(x) y$ [Aveg p136]

Prop : les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou de la forme $a\mathbb{Z}$.

Appl : → $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ [Gou p199]
ex : fonction continue de période 1 et 2π est constante.
→ $\{\sin n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$. [Gou p199]

Déf : soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 \leq a \leq b \leq 1$, $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(a,b) = \#\{n \in [\![1,N]\!],\ a \leq \{u_n\} \leq b\}$
(u_n) est équirépartie modulo 1 si $\frac{1}{N} S_N(a,b) \xrightarrow[N \to +\infty]{} b-a$

Ex : $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ [Al p141]

Prop : (u_n) équirépartie mod 1 ssi $\forall k \in \mathbb{Z}^*\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2ik\pi u_n} \xrightarrow[N]{} 0$

ssi $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-pér. continue $\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f(u_n) \xrightarrow[N]{} \int_0^1 f$

Ex : $(n\gamma)$ équirépartie mod 1 ssi $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. [Al p142]

Prop : si (u_n) équirépartie mod 1 alors $(\{u_n\})$ est dense dans $[0,1]$. [Al

Th de Koksma : pour presque tout $x>1$, $(x^n)_n$ est équirépartie mod 1.

Rq : on n'en connaît pas mais par ex $((\sqrt{2}+1)^n)$ n'est pas équirépartie mod 1 [CL1 p175]

II) Prolongements.

① des identités matricielles

Prop : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [MT p14]

Appl : → AB et BA ont même polynôme caractéristique [MT p14]
→ il existe une base formée d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$. [MT p16]
→ $D(\det)(M).H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}\, M \times H)$ [Rou p75]
→ décomposition polaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ [Serre

Prop : les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [Gou p184]

Appl : → $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$
→ $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\chi_M(M) = 0$ [Gou p184]

② des applications

Th : (E,d), (F,δ) espaces métriques tels que (F,δ) complet, A dense ds E et $f : (A,d) \to (F,\delta)$ uniformément continue. Alors il existe une unique fonction $g : E \to F$ unif. continue telle que $g_{|A} = f$. [Gou p24]

C-ex : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dense dans $\mathbb{R}$ mais ne peut pas se prolonger par continuité à $\mathbb{R}$. → Tietze

Appl : → intégrale de Riemann pour fonctions réglées
→ intégrale de Lebesgue pour fonctions mesurables positives
→ prolongement de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ → unicité, isométrie-même
→ dual de L^p $1<p<2$ [ZQ p212]

3) Prolongement de convergence Paul Lévy + Th. L.

III) Approximation et régularisation.

① approximation polynomiale

Soit (E,d) métrique compact

Th de Stone Weierstrass : toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ séparante contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ séparante auto-conjuguée contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$

Th Weierstrass: toute fonction de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes. [Gou p225]

Th: Toute fonction continue 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Appl: → $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ t.q $\forall n \in \mathbb{N} \int_a^b f(t)t^n\,dt = 0$ alors $f = 0$ [Gou p281]

→ Th tauberien fort [Gou p284]

→ Th de Müntz : (α_n) suite strictement croissante à valeurs positives t.q $\sum \frac{1}{\alpha_i}$ Dv alors $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})$ dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$ (réciproque vraie). [Gou p286]

Démonstration par le théorème de Korovkin DVT

② **convolution et L^p** $1 \leq p < +\infty$

Th: $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. [Rud p84]

Déf: soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive t.q $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n : x \mapsto n\varphi(nx)$ (φ_n) est une identité approchée [OA p119]

Th: $f \in L^p(\mathbb{R})$ $f * \varphi_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$ [OA p120]

Th: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense ds $L^p(\mathbb{R})$ [OA p121]

Appl: → lemme de Riemann Lebesgue $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\lim_{|\gamma| \to +\infty} \hat{f}(\gamma) = 0$ [Dym p101]

→ Th de Fejér [Kat p13]

IV) Dans les espaces de Hilbert.

①

Déf: un espace métrique (E,d) est *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense. [HL p7]

Ex: tout evn de dim finie, tout métrique compact est séparable.

Déf: H espace de Hilbert. Une *base hilbertienne* de H est une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthonormale et totale ie $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)}$. [HL p108]

Ex: un espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Th: H Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormée. Sont équivalents

i) (e_n) est une base hilbertienne

ii) $\forall x \in H$ $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

iii) $\forall x \in H$ $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ [OA p109]

Prop: $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ [OA p110]

Prop: Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2\,dx$

②

Th: I intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n$ $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$ et tq $\exists \alpha > 0$ $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx$ alors les polynômes orthogonaux associés au poids ρ forment une base hilbertienne de L^2. [OA p140] DVT

Ex: polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$ $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

polynômes de Legendre : $I = [-1,1]$ $\rho(x) = 1$ [OA p141]

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Soit $f \in L^2(]a,b[) \cap \mathcal{C}(]a,b[)$ le polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n est $r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|_2^2} P_k$ [OA p111]

③

Th ergodique von Neumann: T endomorphisme continu de H Hilbert tq $\|H\| \leq 1$. Soit $T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k$. Alors $\forall x \in H$, $T_n(x) \longrightarrow p(x)$ où p projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(I - T)$. [OA p137]

Appl: $H = L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\cdot + k\alpha) \xrightarrow[n]{H} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

V) En analyse fonctionnelle.

Cor de Hahn-Banach: E evn F sev de E t.q $\forall f \in E'$, $f_{|F} = 0 \Rightarrow f = 0$ Alors F est dense dans E. [Bre p7]

Appl: → $\mathrm{Vect}\left(f_n : x \mapsto \frac{1}{x - a_n}, n \in \mathbb{N}, (a_n) \in (]1,+\infty[)^{\mathbb{N}}, \ldots \right)$

→ Evn t.q E' séparable. Alors E est séparable. [GT p 150]

Th de Baire : (E,d) métrique complet. [Bre p 15]

. $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de fermés d'intérieur vide, alors $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{n\geq 1} X_n}} = \emptyset$

$\Updownarrow$. $(Y_n)_{n\geq 1}$ suite d'ouverts denses dans E, alors $\bigcap_{n\geq 1} Y_n$ est dense dans E

Appl : → E evn à [redacted]. Alors [redacted]. [Gou]

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$ [[redacted]]

→ les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. [[redacted]]

→ $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 0$

Alors f est un polynôme sur $\mathbb{R}$. [[redacted]]

Th Banach-Steinhaus : E, F Banach $(T_i)_{i\in I}$ famille d'opérateurs linéaires continus t.q $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty\ \ \forall x \in E$,

Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$ [Bre p 16]

Th de l'application ouverte : E, F Banach $T : E \to F$ linéaire surjectif

Alors il existe $c > 0$ tq $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$ [Bre p 19]

Cor : E, F Banach $T : E \to F$ linéaire continu bijectif. Alors T^{-1} est continu. [Bre p 19]

Th du graphe fermé : E, F Banach $T : E \to F$ linéaire tel que le graphe de $T = \{(x, T(x)), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$. Alors T est continu. [Bre p 20]

(E,d) $\mathbb{C}$ evn métrique complet séparable. A endomorphisme continu de E.

Déf : $x \in A$ est hypercyclique si $\{A^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E.

A est hypercyclique si l'ensemble de ses points hypercycliques est dense dans E. [GT p 103]

Prop : critère de Kitai : si il existe X, Y denses dans E tels que : $x \in X \Rightarrow A^n(x) \xrightarrow[n]{} 0$ DVT

$y \in Y \Rightarrow B^n(y) \xrightarrow[n]{} 0$

$y \in Y \Rightarrow AB(y) = y$ alors A est hypercyclique.

Ex : $E = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ muni de distance $d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \dfrac{S_n}{1+S_n}$

où $S_n = \sup \{|(f-g)(z)|, |z| \leq n\}$.

$A : f \mapsto f'$ est hypercyclique.

Th : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour $1 \leq p < +\infty$ $L^p(\Omega)$ est séparable. [Bre p 6…]

Rq : $L^\infty(\Omega)$ non séparable. [Bre p 66]

Sous-espaces de $\mathbb{L}^\infty$ fermés

Bibliographie :

[Kat] Katznelson Harmonic analysis

[Gou] Gourdon Analyse

[Bre] Brézis Analyse fonctionnelle

[AE] Alessandri Thèmes d'analyse

[ZQ] Zuily Queffélec Analyse

[Leh] Lehmann Initiat° à topo g-ale

[CL1] Chambert-Loir Exos analyse 1

[Dym] Dym MacKean Fourier series

[GT] Gonnord Tosel Topo et anaf

[OA] Objectif Agrégation

[MT] Mneimné Testard Gpes de Lie

[HL] Hirsch-Lacombe Anaf

[Rou] Rouvière Calcul différentiel

[Lei] Leichtnam Exos corrigés