Convergence des séries entières.
Propriétés de la somme.
Exemples et applications.

I/ Généralité

a) Déf: Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum U_n(z)$ où $U_n(z) = a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

Lemme d'Abel:

Soit $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sup_n |a_n| r^n < +\infty\}$

. $\sum_n a_n z^n$ converge normalement dans $\bar{D}(0,r)$, $\forall\ 0 \leq r < R$.

. $|z| > R \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge.

Rq: On ne sait pas à priori ce qui se passe pour $|z| = R$.

ex: - $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$

et $|z| = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge.

- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$, $R = 1$ et

$z = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ diverge.

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$, $R = 1$ et divergence grossière sur le bord.

Corollaire: La somme de la série est continue sur $D(0,R)$.

b) Détermination pratique du rayon de convergence.

Formule de Cauchy-Hadamard:

$\forall$ série entière $\sum_n a_n z^n$,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n}$$

Applications:
- règle de Cauchy
- règle de d'Alembert:

si $\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ a_n \neq 0$

et si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$

on a $R = \frac{1}{\ell}$.

ex: on définit $\forall z \in \mathbb{C}$,

$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

- $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence

ex: $\forall z \in \mathbb{C} / |z| < 1$, on définit:

$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$

c) Opérations sur les séries et rayon de convergence:

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R > 0$ et $R' > 0$. On note f et g les sommes de ces séries sur leur disque de convergence D et D'.

• Somme : on pose $\forall n$, $c_n = a_n + b_n$.
La série entière $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R'' \geq \inf\{R, R'\}$ et sur $D \cap D'$, $f + g$ est la somme de cette série entière

• Produit : on pose $\forall n$, $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.
La série entière $\sum c_n z^n$ a pour rayon de convergence $R'' \geq \inf\{R, R'\}$ et sur $D \cap D'$, fg est la somme de cette série entière.

Rq: La minoration peut être stricte

ex: produit de $1-z$ et $\sum z^n$.

• Inverse pour le produit. [L.F]

Soit $A = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et telle que $a_0 \neq 0$.
Il existe une série entière unique B, dont le rayon de convergence est non nul, et qui vérifie $AB = 1$, d'où : $\tilde{A}(z)\tilde{B}(z) = 1$

pour $|z| < \inf(R(A), R(B))$.

II/ Propriétés de la somme sur $D(0,R)$

1) Dérivabilité [Z. Q]

Th : $z \in D(0,R)$,
$\lim_{\substack{|h|\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = f'(z)$

Par réccurence on obtient :
$\forall k \geq 0, \forall z \in D(0,R), f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n\ldots(n-k+1)\, a_n z^{n-k}$

En d'autres termes f est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la variable complexe sur $D(0,R)$.

Conséquence : $n!\, a_n = f^{(n)}(0)$

Inégalités de Cauchy : [Z. Q]
$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad (0<r<R)$

$|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Applications :
- Th de Liouville
- Soit $\sum_0^\infty a_n z^n$ une série entière de rayon 1, f sa somme sur D et $\alpha \in]0,1[$.

$\exists c_1>0$ tq $|f(z)| \leq c_1 (1-|z|)^{-\alpha}$ si $z\in D$;
$\Rightarrow \exists c_2>0$ tq $|a_n| \leq c_2 n^\alpha$ si $n \geq 1$.

[Z.Q] ex 3 p 56.

2) Analycité. [C]

Déf : - On dit que la fonction f de l'ouvert Ω de K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans K est développable en série entière au voisinage du point a de Ω s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et un nombre $r>0$ tels que :
$\forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k$

- La fonction f est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω.

ex : Arctg est développable en série entière au voisinage de 0.

Th : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La somme f de $\sum a_n z^n$ est analytique sur $D(0,R)$. Plus précisement, soit z_0 un nombre complexe tel que $|z_0|<R$. Alors la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $\geq R - |z_0|$ et l'on a pour $|z-z_0| < R-|z_0|$,
$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ [C]

Principe du prolongement analytique :
Si deux fonctions analytiques f et g dans un ouvert connexe D coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, elles sont identiques dans D.

Application :
$\forall z \in \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2/2} \dfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{z^2/2}$

En particulier, la fonction caractéristique de la loi gaussienne est :
$\varphi : t \longmapsto e^{-t^2/2}$

Critère de développement en série entière : [C]

Th : Pour qu'une fonction d'une variable réelle x, $\mathcal{C}^\infty$ dans un ouvert D, soit analytique dans D, il faut et il suffit que tout point $x_0 \in D$ possède un voisinage V admettant la prop suivante : $\exists M, t>0$ tels que :
$\forall x \in V, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\dfrac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M . t^p$

Théorème de Bernstein : Soit $a>0$, et f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[-a,a]$ dans $\mathbb{R}$. Si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est positive, f est développable en série entière sur $]-a,a[$.
[P]

Th : Pour qu'une fonction f d'une variable complexe z soit analytique il faut et il suffit qu'elle soit $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable complexe.

III | Etude sur le bord du disque de convergence.

1) Théorème d'Abel radial [Gd]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité.

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

où $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et

$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1$ et $\exists \rho \in]0, \cos\theta_0]$, $\exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, $z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

Applications :

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ si $0 < t < 2\pi$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

[Gd]

2) Un théorème taubérien faible.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur $D(0,1)$. On suppose :

i) $\exists s \in \mathbb{C}$ tel que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = s$

ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$

Alors la série $\sum a_n$ converge, sa somme étant égale à s.

Rq : Ce résultat est réciproque partiel du th d'Abel.

3) Th de Comparaison : [Gd]

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ 2 séries entières de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ et $\sum b_n$ est divergente.

$\forall p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k$ et $B_p = \sum\limits_{k=0}^{p} b_k$.

S'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \ell$

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{\substack{x \to 1 \\ x < 1}}{\sim} \ell \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$

Application :

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$

4) Points réguliers, points singuliers

Déf : - $a \in \partial D$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$

- $a \in \partial D$ est dit singulier s'il n'est pas régulier

Ex : $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ 1 point singulier

Th : Il y a toujours au moins un point singulier sur ∂D. [Z-Q]

Application : $\sum n^{-\alpha} z^n$, $\alpha > 0$

1 est le seul point singulier

IV | Applications

1) En probabilités :

- Soit X une v.a discrète [F.F1]

Th : La fonction génératrice $G_X(s)$ admet une dérivée à gauche $G_X'(1)$ en $s = 1$, si et seulement si $\mathbb{E}[X]$ existe et est fini, et l'on a : $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.

- Etats récurrents - états transcients.

- Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov.
- On pose : $\forall i, j$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$P_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}\{X_n = j \,|\, X_0 = i\}$

$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$

$f_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}\{T_j = n \,|\, X_0 = i\}$, $f_{i,j}^{(0)} = 0$

Déf : Un état j est dit récurrent si $f_{j,j} = 1$. On dit qu'il est transcient si $f_{j,j} < 1$.

[F.F2]

Théorème : Critère de récurrence :

Un état j est récurrent ou transcient selon que : $\sum\limits_{n \geq 0} P_{j,j}^{(n)} = +\infty$

ou que $\sum\limits_{n \geq 0} P_{j,j}^{(n)} < +\infty$.

2) Equations différentielles : [Z-Q]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, soient p, q 2 fonctions réelles continues sur I, $x_0 \in I$.

On pose : (E) $y'' + py' + qy = 0$

Th: On suppose que $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$, les séries convergent pour $|x| < R$.
Alors $\forall (a_0, a_1) \in K^2$, (E) a une solution unique telle que :
$y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant développable en série entière convergente sur $]-R, R[$.

3) Equations diophantiennes.

On cherche le nombre $p(n)$ de triplets (x, y, z) d'entiers positifs vérifiant : $x + 2y + 3z = n$

$$p(n) = \frac{(n+3)^2}{12} - \frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Plus généralement, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des entiers positifs premiers entre eux dans leur ensemble, soit $p(n)$ le nombre de de m-uplets $(x_1, \dots, x_m)$ d'entiers positifs vérifiant :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = n$$

alors : $p(n) \sim \dfrac{n^{m-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_m (m-1)!}$

[Ch 1]

4) nombres de Catalan

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_1 a_{n-1} + \dots + a_{n-1} a_1 \\ n \geq 2 \end{cases}$$

[illegible]

Réf :

[Gd] Gourdon analyse

[Z-Q] Zuily - Queffelec

[C] Cartan "Théorie élémentaire des fonctions analytiques"

[Ch 1] Chamberlin - Fermigier - Maillot 1

[F-F1] Foata - Fuchs "Calcul des probabilités"

[F-F2] Foata - Fuchs "Processus stochastiques"

[L-F] Lelong - Ferrand "Analyse 2"