CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

I - CONTINUITÉ :

→ ① - Définitions :

Déf : f est dite continue en $a \in A$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que : $\forall x \in A$,

$$(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

Déf équivalente : f est continue en a ssi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$.

Déf : • f est dite continue à gauche (resp : à droite) en $a \in A$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$)

• f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

• Si f n'est pas continue en un point $a \in A$, elle est dite discontinue en a.

Exemples : • $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

• Si f et g sont continues $x \mapsto \sup(f(x), g(x))$ est continue.

• $x \mapsto E(x)$ est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Caractérisation séquentielle :

(f est continue sur A) ssi ($\forall a \in A$, $\forall (x_n)_n$ suite d'éléments de A tendant vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$).

Contre-exemple : la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

→ ② - Premières propriétés :

Proposition : L'ensemble des fonctions $A \to \mathbb{R}$ continues sur A est une $\mathbb{R}$-algèbre notée $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(A)$

Application : les fonctions polynomiales sont continues.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{C}^0(A)$, Soit $g \in \mathcal{C}^0(B)$ où $B \subset \mathbb{R}$ est tel que $f(A) \subset B$.

Alors $f \circ g \in \mathcal{C}^0(A)$.

Exemple : Si f est continue, $|f|$, f^+ et f^- sont continues

Proposition : Prolongement par continuité

Soit $\hat{A} \subset A$. Soit $f : \hat{A} \to \mathbb{R}$ continue sur $\hat{A}$. On dit que f est prolongeable par continuité sur A s'il existe $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ continue sur A et telle que f et $\tilde{f}$ coïncident sur $\hat{A}$.

Exemples : • $x \mapsto \frac{1}{x} \sin x$ est prolongeable par continuité en 0.

• $x \mapsto \sin(1/x)$ ne l'est pas.

→ ③ - Propriétés topologiques :

Prop : Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors, dans un voisinage de a, f est du signe de $f(a)$.

Application : L'intégrale sur un intervalle I d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle est strictement positive.

Théorème : Valeurs intermédiaires :

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Application : Dichotomie.

Corollaire : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Soient a et b dans I tels que $f(a)f(b) < 0$. Alors $\exists c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

Application : si $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ est continue, elle admet un point fixe.

Théorème : Soit K une partie compact non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$

Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.

En particulier : f est bornée sur K et atteint ses bornes.

→ ④ - Continuité uniforme :

Déf : Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur A ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in A^2$, $(|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

Proposition : f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.
⚠ la réciproque est fausse

Contre-exemple : • $x \mapsto x^2$ continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue

• De même pour $x \mapsto 1/x$ sur $]0, 1]$.

Théorème (Heine) : Soit K une partie compact de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(K)$

Alors f est uniformément continue.

Prop : l'image par f uniformément continue d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

Théorème (Weierstrass) : Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Une caractérisation de l'uniforme continuité :
On appelle module de continuité de $f : A \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h \mapsto \omega(h) = \sup\{|f(x)-f(y)| \,/\, (x,y)\in A^2, |x-y|<h\}$.
Alors : (f uniformément continue $\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \omega(h) = 0$)

Déf : Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne, $k>0$ si $\forall (x,y)\in A^2$, $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$.
Si de plus $k<1$ alors f est dite contractante.

Remarque : f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue.

Théorème : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ contractante (au moins localement). Alors f admet un unique point fixe $a \in A$. En outre pour tout point initial $x_0 \in A$, la suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = f(x_p)$ converge vers a.

Application : méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$.

→ ⑤ - **Discontinuités :**

Déf : • Une discontinuité en un point $a \in A$ est dite de première espèce si la limite à gauche et la limite à droite en a existent.
• Une discontinuité qui n'est pas de première espèce est dite de seconde espèce.

Exemple : • $\mathbb{1}_{[0,1]}$ a deux points de discontinuité de première espèce : 0 et 1
• $\sin(1/x)$ a une discontinuité de deuxième espèce en 0.

Déf : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier.

Prop : f est réglée ssi f n'a que des points de discontinuité de première espèce.

Exemple : la fonction de Weierstrass : $f : [0,1] \to [0,1]$ ... $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
est continue sur $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [0,1]$ et discontinue sur $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Elle est réglée sur $\mathbb{R}$.

Prop : l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable.

II - Dérivabilité :

→ ① - **Définition et premières propriétés :**

Déf : • f est dérivable en $a \in A$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A\setminus\{a\}}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Si c'est le cas cette limite est notée $f'(a)$.
• f est dérivable sur A si elle est dérivable en tout point de A. Sa dérivée est notée f'.

Rqe : f dérivable $\Rightarrow$ f continue mais la réciproque est fausse : on pose $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f(4^n x)}{4^n}$ où $f(x) = |E(x+1/2)-x|$ | F est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Théorème : L'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. [DUPT 1].

Prop : • l'ensemble des fonctions dérivables sur est une $\mathbb{R}$-algèbre
• Si f dérivable sur A, g dérivable sur B ($B\subset\mathbb{R}$ / $f(A)\subset B$) alors $f\circ g$ dérivable sur A et $(f\circ g)' = g' \times f'\circ g$.

Théorème : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in I$. Soit $f : I\to\mathbb{R}$. Si $a \in \mathring{I}$, f dérivable en a, alors f admet un extremum local en $a \Rightarrow f'(a)=0$

⚠ la réciproque est fausse : $x\mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 qui n'est pas un extremum.

Rqe : Pour rechercher un extrema on peut appliquer la méthode de Newton à f'.

→ ② - **Théorèmes fondamentaux :**

Théorème : (Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application : Si f dérivable sur $[a,b]$ et $f'(a)f'(b)<0$, alors $\exists c\in]a,b[$ tq $f'(c)=0$

Csq : Théorème de Darboux : Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

Théorème : Accroissements finis
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Application : Prolongement des fonctions dérivables
I intervalle de $\mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $a \in I$. Si f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' a une limite l en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

⚠ Si f dérivable sa dérivée n'est pas forcément continue :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $f'(0) = 0$ mais $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

→ ③ - Dérivées d'ordre supérieur :

Def : • On définit par récurrence la dérivée $n^{ième}$ de f, notée $f^{(n)}$, par : $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
• f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, si f est k fois dérivable sur A de dérivée $k^{ième}$ continue sur A.
• Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A alors f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A.

Prop : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$

Théorème : Formule de Leibnitz. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors : $(fg)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

Formule de Taylor : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Application : Théorème de Glaeser [OUPT 2].
I intervalle de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$. On suppose $f \geq 0$. Alors ($\sqrt{f}$ est $\mathcal{C}^1$) ssi ($\forall t \in f^{-1}(\{0\})$, $f''(t) = 0$).

→ ④ - Lien avec les séries de Fourier :

Prop : Si f est 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors f est la somme de sa série de Fourier.

Prop : $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^p$ par morceaux vérifient :
$$c_n(f^{(p)}) = (in)^p c_n(f)$$

Prop : le $n^{ième}$ coefficient de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ est en $O(1/|n|^p)$.

III - Fonctions monotones et convexes :

→ ① - Continuité et monotonie :

Prop : Toute fonction monotone est réglée

csq : l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Théorème : I intervalle de $\mathbb{R}$. $f : I \to \mathbb{R}$ monotone sur I. Alors f continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle.

Théorème : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. $f \in \mathcal{C}^0(I)$: f injective ssi f strictement monotone.

Dans ce cas f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$ et f et f^{-1} sont de même monotonie.

→ ② - Continuité et dérivabilité :

Prop : $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. Alors f constante (resp : croissante, décroissante) sur I $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ (resp : $f' \geq 0$, $f' \leq 0$) sur $\mathring{I}$.

Exemple : Fonction de Lebesgue : il existe une fonction continue sur $[0,1]$, croissante dérivable telle que $f(0) = 0$ $f(1) = 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 0$.

Proposition : $f : I \to \mathbb{R}$ continue, monotone sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. Alors (f strictement monotone) $\Leftrightarrow$ ($\{a \in I \mid f'(a) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle d'intérieur non vide)

→ ③ - Convexité :

Théorème : Soit f dérivable sur $[a,b]$. f convexe ssi f' croissante sur $[a,b]$.

Corollaire : Si f est deux fois dérivable sur I, f'' positive (resp négative) sur I $\Rightarrow$ f convexe (resp concave).

Exemples : $x \mapsto e^x$ convexe sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \ln x$ concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prop : une fonction convexe définie sur un ouvert est continue sur cet ouvert.

Prop : Une fonction convexe est dérivable sauf en un nombre dénombrable de points.

Ref : • Francinou - Gianella (oraux X-ens) • Gourdon
• Hauchecorne (Ex et c-ex) • Doukhan (An. réelle et intégration)