(1)

242- Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ variables aléatoires $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ euclidien (v.a)

Notion probabiliste fondamentale : indépendance

1/ Produit de convolution et indépendance.

X, Y v.a. indépendantes. loi de $X+Y$? $S : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $(x,y) \longmapsto x+y$

déf : (produit de convolution) μ, ν mesures finies sur $\mathbb{R}^d$, f mesurable sur $\mathbb{R}^d$

i) le produit de convolution $\mu * \nu$ de μ et ν est la mesure image par S de $\mu \otimes \nu$.

ii) Si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \longmapsto f(x-y)$ est μ-intégrable, le produit de convolution $f * \mu$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $(f*\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, d\mu(y)$.

prop 1: Pour tout $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_1 * \mu_2 = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x_1+x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

prop 2: Pour toutes mesures μ, ν, ν' finies, i) $\mu * \nu = \nu * \mu$ et ii) $\mu * (\nu + \nu') = \mu * \nu + \mu * \nu'$.

exemple : - $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1$, $\delta_1 * \delta_1 = \delta_1$, $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

- $\mu = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$, $p \in [0,1]$ (loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$)

$\underbrace{\mu * \dots * \mu}_{n} = (p\delta_0 + (1-p)\delta_1)^{*n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} (1-p)^k \delta_k$

(loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$)

prop 3: Si X et Y sont indépendantes, la loi de $X+Y$ est $P_X * P_Y$.

Corollaire : Si X et Y sont à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $X \sim f\, d\lambda$ et $Y \sim g\, d\lambda$ alors $X+Y$ est à densité et cette densité est donnée pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $\int f(x-y) g(y)\, dy$.

Familles de lois stables par convolution.

- $X \sim \mathcal{N}(n_X m, n_X \sigma^2)$ $Y \sim \mathcal{N}(n_Y m, n_Y \sigma^2)$ $n_X, n_Y \in \mathbb{N}$, X, Y indépendantes. Alors $X+Y \sim \mathcal{N}((n_X+n_Y)m, (n_X+n_Y)\sigma^2)$
- $X \sim \mathcal{P}(n_X \lambda)$. $Y \sim \mathcal{P}(n_Y \lambda)$ $n_X, n_Y \in \mathbb{N}$. Alors $X+Y \sim \mathcal{P}((n_X+n_Y)\lambda)$.

Lois infiniment divisibles. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

X est dite infiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires i.i.d $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ t.q X et $X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ ont même loi.

- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est infiniment divisible de même que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Prop 4: Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^d} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right). \text{ Alors}$$

i) g_σ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{\sigma \to 0} \int_{\|x\| > \varepsilon} g_\sigma(x)\, dx = 0$

iii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f * g_\sigma)(x) \xrightarrow[\sigma \to 0]{} f(x)$

[iii) montre que $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ est une famille d'approximation de l'unité.]

Remarque : L'enjeu est de caractériser les lois des variables aléatoires. Comment déterminer de façon simple si deux variables aléatoires ~~sont~~ sont ou ne sont pas indépendantes ?

⤳ introduction de nouveaux outils :

- transformée de Fourier d'une loi de probabilité
- transformée de Laplace " "

(2)

2/ Caractérisation des lois de probabilités, critères d'indépendance. Transformées de Fourier et de Laplace.

1. La transformée de Fourier.

déf : Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$. L'application (définie sur $\mathbb{R}^d$)
$t \longmapsto \int \exp(i\langle t,x\rangle)\, d\mu(x)$ notée $\hat{\mu}$ est dite transformée de Fourier de μ.

prop 5. i) $\hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$ ii) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{\mu}(t)| \leq \mu(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$
iii) $\hat{\mu}$ est uniformément continue
iv) $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), t, b \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_{AX+b}(t) = \varphi_X(A^* t)\exp(i\langle b,t\rangle)$
v) $\hat{\mu}$ est définie positive ie $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,
$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \hat{\mu}(t_i - t_j) \geq 0$

[v/ caractérise les fonctions $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe μ mesure finie, $\varphi = \hat{\mu}$ (théorème de Bochner)]

ex :
- $\mu = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$, $\hat{\mu}(t) = p + (1-p)e^{it}$
- $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\delta_n$, $\hat{\mu}(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$

$\Big\}\ \forall t \in \mathbb{R}$

- $\mu = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)d\lambda(x)$, $\hat{\mu}(t) = \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2}\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$.

Théorème : (injectivité de la transformée de Fourier). μ, ν mesures finies sur $\mathbb{R}^d$
Si $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, alors $\mu = \nu$ [DVPT]

Application : On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto \hat{P}_X(t) = E(e^{i\langle t,X\rangle})$

En vertu du théorème d'injectivité la fonction caractéristique de X caractérise la loi de X, d'où son importance

Transformée de Fourier et produit de convolution

prop 6. μ, ν mesures finies sur $\mathbb{R}^d$.
Alors $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\cdot\hat{\nu}$

ex : $\mu = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k}(1-p)^k \delta_k$, $\hat{\mu}(t) = (p + (1-p)e^{it})^n$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Critères d'indépendance et transformée de Fourier.

Prop 7 : $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ v.a.
(X, Y indépendantes) ssi $\left(\forall (s,t) \in \mathbb{R}^{2d},\ \varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t)\right)$

Application : $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées
(X, Y indépendantes) ssi $\left(\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2\ E(X^k Y^l) = E(X^k)E(X^l)\right)$

Prop 8 : $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ v.a. Supposons X, Y indépendantes.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

⚠ réciproque de la prop 8 est fausse :
$a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. U, V v.a indépendantes ($\Omega \to \mathbb{R}$) de loi de Cauchy de paramètre 1. Posons $X = aU + bV$, $Y = cU + dV$.
Alors $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ cependant que
$\varphi_{(X,Y)}(s,t) \neq \varphi_X(s)\varphi_Y(t)$.

Application : lois infiniment divisibles. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
(X est infiniment divisible) ssi (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction caractéristique φ_n telle que $\varphi_X = (\varphi_n)^n$)

2. La transformée de Laplace. $d = 1$

déf Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une v.a. de loi P_X. La transformée de Laplace de P_X ou de la v.a. X est la fonction L_X
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(tx)\, dP_X(x)$

⚠ L_X contrairement à φ_X n'est pas nécessairement définie partout. Il se peut que $\int_{\mathbb{R}^d} \exp(tx)\, dP_X(x) = +\infty$.
Notons $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de L_X

ex : $X \sim N(0,1)$, $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}$, $L_X(t) = \exp(t^2/2)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
$X \sim \mathcal{E}xp(1)$, $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$, $L_X(t) = \frac{1}{1-t}$ $\forall t \in]-\infty, 1[$

prop 9 : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$
i) $L_{aX+b}(t) = L_X(at)\exp(bt)$ $\forall t \in \mathcal{D}_{aX+b} = \frac{1}{a}\mathcal{D}_X$.
ii) $0 \in \mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_X$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

iii/ Si $0 \in \mathring{\mathcal{D}}_X$, il existe un voisinage V de 0 sur lequel L_X est analytique.

__Application__ : Supposons $0 \in \mathring{\mathcal{D}}_X$. Alors L_X est analytique dans un voisinage V de 0 et L_X se prolonge de façon unique en une fonction analytique $\tilde{L}_X$ sur $V + i\mathbb{R}$ par $\tilde{L}_X(t+it') = E(\exp((t+it')X))$, $t \in V$, $t' \in \mathbb{R}$. $\tilde{L}_X$ et φ_X coïncident sur $i\mathbb{R}$.

Par conséquent si $0 \in \mathring{\mathcal{D}}_X$, L_X __caractérise__ la loi de X.

__Remarques__ : • $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On peut définir L_X la transformée de Laplace par $L_X(t) = E(\exp(\langle t, X \rangle))$.

• L_X jouit de propriétés analogues à φ_X par rapport au produit de convolution et à l'indépendance.

3/ __Transformée de Fourier, transformée de Laplace et moments__ :

__Comparaison__. $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

__Rem__ : φ_X est définie $\forall t \in \mathbb{R}$.
L_X n'est définie que sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

__Théorème__ : (Transformée de Fourier et moments)

i/ Si X admet un moment d'ordre n, φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$

ii/ Si φ_X est k fois dérivable en 0 ($k \geq 2$), X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{k}{2}\right]$.

__Théorème__ : (Transformée de Laplace et genèse des moments)

Si $0 \in \mathring{\mathcal{D}}_X$, alors L_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $L_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k)$.

__Application__ : démonstration de la loi forte des grands nombres sous l'hypothèse (X_i) suite iid p.s. bornée [DVPT]

4/ __Convergence et théorèmes limites__.

1. __Utilisation de la transformée de Fourier__

__déf__ : (μ_n) suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$.
(μ_n) est dite converger étroitement vers μ mesure de probabilité si $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, $\int f \, d\mu_n \xrightarrow[n\infty]{} \int f \, d\mu$.

On note $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$. (X_n), $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ converge étroitement vers X si $P_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} P_X$

__ex__ : (Théorème central limite) (X_n) suite de v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$
(X_n) iid admettant un moment d'ordre 2.
Alors $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2)$ où $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_1$

__Théorème__ (Levy ; lien entre convergence en loi et transformée de Fourier) (μ_n) suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$

i) Si $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$, $\hat{\mu}_n$ converge simplement vers $\hat{\mu}$.

ii) Si $\hat{\mu}_n$ converge simplement vers $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue en 0 alors il existe une unique mesure μ de probabilités telle que $\varphi = \hat{\mu}$. On a alors $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

__Application__ : Théorème des événements rares.
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq M_n\}$ d'événements indépendants. On pose $P(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.

Supposons $M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $(M_n) \uparrow$, $\max_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\infty]{} 0$
et $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\infty]{} \lambda$.

Alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

2. __Utilisation de la transformée de Laplace__

__Théorème__ : (cas particulier des inégalités de Chernoff).

Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
Alors $P\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq \exp(n\, h(\varepsilon + p))$
où $h(a) = \inf_{t \in \mathbb{R}_+^*} \left(-at + \ln(L_{S_n}(t))\right) < 0$ pour $a > p$.

__Application__ : Jeu de pile ou face : pièce 1 truquée ($p_1 > \frac{1}{2}$) p_i : probabilité pile
pièce 2 non truquée ($p_2 = \frac{1}{2}$)

On prend l'une des deux pièces : on veut déterminer si la pièce est truquée (test de niveau 0,05). Si la pièce est non truquée et si $\exp(n\, h(\varepsilon_n + \frac{1}{2})) \leq 0{,}05$ alors $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon_n\right) \leq 0{,}05$ (où S_n : nombre de "pile").

On calcule $\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}$ (après avoir effectué n lancers)
si $\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \varepsilon_n$ on décide (avec 5% de chance de se tromper) que la pièce est truquée.
Tout se ramène à déterminer ε_n tel que $\exp(n\, h(\varepsilon_n + \frac{1}{2})) \leq 0{,}05$

Bibliographie :

- Ouvrard, Probabilités 2 (essentiellement chap. 12 et 14)
- Toulouse, Thèmes de probabilités et statistique (chap. 1 et 3, et introduction)
- Cottrel, Exercices de probabilités (chap. 4 et 5)