131 : formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. orthogonalité, isotropie. Applications

<u>Notations</u> : E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$

1. Généralités : définitions et 1ères propriétés :

1.1 : forme bilinéaire symétrique :

<u>Déf</u> : Une forme bilinéaire symétrique sur E est une application $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ tq
→ φ linéaire par rapport à la 1ère et 2ème variable
→ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ $\forall x,y \in E$

φ induit une application linéaire $\tilde{\varphi} : E \to E^*$
$x \to (\tilde{\varphi}(x) : y \to \varphi(x,y))$

<u>Déf</u> : (i) On définit le rang de φ comme étant le rang de $\tilde{\varphi}$
(ii) On définit le noyau de φ comme étant le noyau de $\tilde{\varphi}$: $N(\varphi)$
(iii) φ est dite non dégénérée si $\tilde{\varphi}$ injective (ie $N(\varphi) = \{0\}$).

1.2 : forme quadratique et forme polaire : [GOU] [GRI]

<u>Déf</u> : Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to \mathbb{K}$
$x \to \varphi(x,x)$
où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

<u>Thrm</u> : Soit q forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que : $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. φ = forme polaire de q. On a :

$\forall x,y \in E$ $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ Id de polarisation
$= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

<u>Thrm</u> : $q : E \to \mathbb{K}$ forme quadratique ssi $\begin{cases} \text{(i) } \forall (\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) \\ \text{(ii) } (x,y) \to \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) \text{ bilinéaire symétrique sur } E. \end{cases}$

<u>Déf</u> : (i) Rang d'une forme quadratique $= rg(\varphi)$
(ii) Noyau : $N(q) = rad(q) = N(\varphi)$

1.3 : Représentation matricielle : [GOU]

$\mathcal{B} := (e_1, \dots e_n)$ base de E. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ · $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_i \varphi(e_i,e_j) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j =$

(expression analytique de φ)

$M := Mat_{\mathcal{B}}(q) = (\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On a la relation : $\varphi(x,y) = {}^tXMY$

<u>Remarques</u> :
- M est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{\varphi}$ induit par φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$.
- de l'expression analytique de φ on en déduit que φ est un polynôme homogène de degré 2 en les variables x_i, y_i et que M est symétrique.
- Ainsi l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

<u>Effet d'un changement de base</u> :
$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. $P =$ $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(q)$, $M = Mat_{\mathcal{B}}(q)$
$M' = {}^tPMP$
Ces matrices M' et M sont dites congruentes. Elles ont même rang, et représentent les m formes quadratiques dans des bases différentes.

<u>Discriminant</u> :
Le déterminant dépend du choix de la base.

$\Delta :=$ image de $\det M$ dans $\{0\} \cup \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$. c'est un invariant.

<u>Théorème</u> : q non dégénérée $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

2. Orthogonalité, isotropie :

2.1 : Définitions et Théorèmes : [GOU] [GRI]

Déf : (i) $x, y \in E$ sont dits orthogonaux selon q si $\varphi(x,y) = 0$

(ii) On appelle orthogonal de A selon q l'ensemble
$A^\perp := \{ y \in E \mid \forall x \in A \quad \varphi(x,y) = 0 \}$

(iii) Deux sous-ensembles A et B sont dits orthogonaux selon q si
$\forall x \in A, \forall y \in B \quad \varphi(x,y) = 0$. On note $A \perp B$

Théorème : (i) $N(q) = E^\perp$

(ii) $\forall A \in E, N(q) \subset A^\perp$

Thm : $\dim E = \operatorname{rg} q + \dim N(q)$

Thm : F un sous-espace vectoriel de E.

(i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim F \cap N(q)$

(ii) $F^{\perp\perp} = F + \operatorname{Ker} q$

En particulier q non dégénérée $\Rightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim F^\perp \\ F^{\perp\perp} = F \end{cases}$

Déf : (i) x est un vecteur isotrope si $\varphi(x,x) = 0$

(ii) On appelle cône isotrope de E l'ensemble $C_q := \{x \in E \mid q(x) = 0\}$
c'est l'ensemble des vecteurs isotropes de E

(iii) q est définie si $C_q = \{0\}$

Thm : $N(q) \subset C_q$ En particulier : q définie $\Rightarrow$ non dégénérée

⚠ Réciproque fausse ! $\varphi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ sur E de dim 2.
φ est non dégénérée sans être définie.

Déf : . $\operatorname{rad}(F) := \operatorname{rad}(q_{/F}) = \{x \in F \mid \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0\}$

. F est dit non isotrope si $q_{/F}$ non dégénérée, ie $\operatorname{rad}(F) = \{0\}$. $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\}$

. F est dit isotrope si $q_{/F}$ dégénérée ($\operatorname{rad} F \neq \{0\}$). $\Leftrightarrow F \cap F^\perp \neq \{0\}$

. F est dit totalement isotrope si $q_{/F} = 0$ ($\operatorname{rad} F = F$) $\Leftrightarrow F \subset F^\perp$

Thm : $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ non isotrope

2.2 : Existence des bases q-orthogonales :

Thm : Soit (E,q) ev de dim finie muni d'une forme quadratique q.
Alors il existe une base de E q-orthogonale.

Conséquences sur l'expression analytique de q et sur M :

$\mathcal{B}$ base q orthogonale. $x = \sum_i x_i e_i$.

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i^*(x))^2$

q s'écrit comme ~~carrés~~ de carrés de formes linéaires indépendantes.

Et $M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

2.3 : Méthode de Réduction de Gauss : [GOU]

$q(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$

1er cas : $\exists i_0$ tq $a_{i_0 i_0} \neq 0$: on regroupe les variables x_{i_0} avec : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2e cas : Pas de termes carrés. On choisit i_0, j_0 tel que $a_{i_0 j_0} \neq 0$ puis on rassemble toutes les variables x_{i_0} et x_{j_0} en utilisant $x_{i_0} x_{j_0} + x_{i_0} S + x_{j_0} R = (x_{i_0} + R)(x_{j_0} + S) - RS$
puis l'identité $XY = \frac{1}{4}((X+Y)^2 - (X-Y)^2)$

3. Classification des formes quadratiques :

Déf : q_1 et q_2 formes quadratiques sur E sont dites équivalentes ou isométriques s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_2(x) = q_1(u(x))$
u est appelé isométrie ou automorphisme orthogonal.

3.1 : Classification pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: [GOU]

Thm : $\exists (e_i)_{1 \le i \le n}$ base de E q-orthogonale telle que pour $x = \sum_i x_i$ on ait :
$q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$, $\operatorname{rg} q = r$. c'est à dire : $M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array}$

Donc 2 formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ sont équivalentes ssi la dimension de l'espace et le rang sont égaux.

Les orbites de $GL(E)$ dans $Q(E)$ sont en nombre $(n+1)$, associées aux rangs possibles $r = 0, \ldots n$.

3.2 : Classification des formes quadratiques pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

Théorème de Sylvester : [GOU]

E $\mathbb{R}$ev de dim n et q forme quadratique sur E. Il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que pour $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on ait : $q(x)=\sum_{i=1}^{r} x_i^2-\sum_{i=r+1}^{s} x_i^2$

càd : $M_{\mathcal{B}}(q)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow n-(r+s) \end{matrix}$ $\quad rg\, q = r+s$

Le couple (r,s) ne dépend pas de la base. C'est un invariant. Il est noté $sign(q)$ et est appelé signature de q.

Corollaire :

2 formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ sont équivalentes ssi la dimension de l'espace et la signature sont les même.

Les orbites de $GL(E)$ dans $Q(E)$ sont en nombre $(n+1)(n+2)/2$.

q définie positive $\Leftrightarrow sign(q)=(n,0)$

q définie négative $\Leftrightarrow sign(q)=(0,n)$

q non dégénérée $\Leftrightarrow sign\, q=(r,n-r)$

4. Applications à la géométrie :

4.1 : Géométrie différentielle :

Lemme de Morse : [GOU] p 347 ; [ROU] p. 305 ; 327 ; 197

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle en 0, telle que $df(0)=0$. Si la matrice hessienne de f en 0 est inversible, alors il existe un C^∞-difféomorphisme $\varphi:(\varphi_1,\dots\varphi_n)$ défini sur un voisinage Z de $0\in\mathbb{R}^n$, et il existe un entier r tel que pour tout $x\in Z$, $f(x)=[\varphi_1(x)]^2+\dots+[\varphi_r(x)]^2-[\varphi_{r+1}(x)]^2-\dots-[\varphi_n(x)]^2$

Application à la recherche d'extremas : [GOU] p 316-317
[MER] p. 71-72-73 ; 165-166

Soit f une fonction de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a\in\mathbb{R}^n$ un point critique de f et q la forme quadratique de matrice la matrice Hessienne de f en a. Alors :

1) Si f admet un minimum (respectivement maximum) relatif en a, q est une forme quadratique positive (resp. négative)
2) Si q est une forme quadratique définie positive (respectivement définie négative) f admet un minimum (resp maximum) relatif strict en a.
3) Si q n'est ni positive ni négative, alors f n'admet pas d'extremum local en a.

4.2 : Classification des coniques projectives et affines réelles :

Déf : . Une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$ est un polynôme du second degré exactement, à coefficients dans $\mathbb{K}$, en n variables, à un facteur constant non nul près.
. Une quadrique projective de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est une forme quadratique non nulle en $n+1$ variables $Q(x_1,\dots x_{n+1})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, à un facteur constant non nul près.

Théorème : [COS]

On a 5 classes de coniques projectives, dont 2 de non dégénérées, classifiées par les signatures $(3,0)$ $(2,1)$ $(1,1)$ $(2,0)$ $(1,0)$.

Théorème : [COS]

On a 3 classes de coniques affines non dégénérées :
ellipse $(x^2+y^2-1=0)$; hyperbole $(x^2-y^2+1=0)$; Parabole $(x^2=y)$

$\tilde{\alpha}$ projective	$\tilde{\alpha}$ intersection de $\tilde{\alpha}$ avec la droite à l'infini	α affine
conique propre non vide $(2,1)$	(i) vide $(2,0)$ (ii) 2 points $(1,1)$ (iii) 1 point double $(1,0)$	ellipse $x^2+y^2-1=0$ hyperbole $x^2-y^2+1=0$ Parabole $x^2=y$

Références

[GOU] : Gourdon Analyse, Les maths en tête
[GRI] : Grifone, Algèbre linéaire
[MER] : Mercier,
[ROU] : Rouvière,
[BER] : Berger, Géométrie tome 2
[AUD] : Michèle Audin, Géométrie
[SAM] : Samuel, Géométrie projective
[illegible] [COS]