Formes quadratiques sur un ev de dimension finie. Orthogonal, isotropie, applications.

__Cadre__ : K, corps de caractéristique $\neq 2$
E : K-ev de dimension finie $n \geq 1$

1. Généralités

a) Formes bilinéaires symétriques (f.b.s) et formes quadratiques (f.q.)

__déf__ : • Une __forme bilinéaire__ sur E est une application $\varphi : E\times E \to K$ linéaire par rapport à chaque variable.
Elle est dite __symétrique__ si $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

• Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to K$ telle que : * $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$, $q(\lambda x) = \lambda^2 x$

* $\varphi : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une formes bilinéaire symétrique sur K.

φ s'appelle la forme polaire de q

__Rq__. L'ensemble des f.q et l'ensemble des f.b.s sur K ont une structure de K-ev

__Prop__ : A toute f.b.s. φ on associe une f.q. par $q(x) = \varphi(x,x)$ et on a la relation $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ pour tous $x,y \in E$

__Th__ : L'application qui à toute f.q. sur E associe sa forme polaire est un isomorphisme entre l'ev des f.q. sur E et l'ev des f.b.s. sur E.

Dans toute la suite, on notera q une f.q. sur E et φ sa forme polaire.

__ex__ : • $M \mapsto tr({}^tMM)$ est une f.q. sur $M_n(K)$
• La différentielle seconde d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (où U ouvert de $\mathbb{R}^n$)

b) Interprétation matricielle

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

__déf__ : On appelle __matrice de φ__ (ou q) dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de $M_n(K)$ définie par $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$

__NB__ La matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.

__ex__ : matrice hessienne de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (où U = ouvert de $\mathbb{R}^n$)

__Th__ : L'application $\varphi \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est un isomorphisme de l'ev des f.b.s. sur E vers le sev des matrices symétriques de $M_n(K)$.

__Prop__ (calcul dans une base)
Notons $X, Y \in K^n$ les vecteurs colonne des coordonnées de $x, y \in E$ dans la base $\mathcal{B}$; $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$
On a, $\varphi(x,y) = {}^tXMY$ et $q(x) = {}^tXMX$

__Prop__ (changement de base)
Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
Alors $\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tP\, Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)\, P}$

⚠ $\neq$ du changement de base pour un endomorphisme

c) Rang et noyau d'une f.q (d'une f.b.s)

Posons pour $y \in E$: $\varphi_y = \varphi(\cdot, y)$. φ définit une application linéaire

$$\tilde{\varphi} : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ y \longmapsto \varphi_y \end{array}$$

En notant $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, on a $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\tilde{\varphi}) = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$

__déf__ : Par abus de langage, le sous-espace $Ker\, \tilde{\varphi}$ s'appelle le __noyau__ de q (de φ) et $rg(\tilde{\varphi})$ s'appelle le __rang__ de q (de φ)
Le __discriminant__ de q (de φ) (dans la base $\mathcal{B}$) est $\det(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\tilde{\varphi}))$.

__Csq__ : On peut utiliser le th. du rang pour q (pour φ) : $\boxed{\dim E = rg(q) + \dim Ker(q)}$

__déf__ : On dit que q est __non-dégénérée__ (resp. dégénérée) si $Ker\, q = \{0\}$ (resp. $Ker(q) \neq \{0\}$)

__Application__ : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et O une origine.
Rappelons qu'une quadrique Q est définie par $\{M \in \mathcal{E} : q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c = 0\}$ où q est une f.q et L une forme linéaire. Alors :
Q possède un unique centre de symétrie ssi q est non-dégénérée.

2. Orthogonalité et isotropie

a) Orthogonalité

déf : • On dit que deux éléments de E, x et y, sont orthogonaux (relativement à φ) si $\varphi(x,y)=0$.

• Soit $A\subset E$. L'orthogonal de A est $A^{\perp} := \{x\in E : \forall a\in A, \varphi(a,x)=0\}$

NB : $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E

ex : Par définition, $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi} = \{y\in E : \forall x\in E, \varphi(x,y)=0\}$

donc $\mathrm{Ker}\, q = E^{\perp}$

Prop : Soit H un sev de E : • $\dim H + \dim H^{\perp} \geq \dim E\ (=n)$

• Si q est non dégénérée, alors $\dim H + \dim H^{\perp} = n$

⚠ Même si q est non dégénérée, en général, E n'est pas somme directe de H et $H^{\perp}$.

Contre-ex : $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$H = \{x : x_1 = x_2\}$. Alors $H = H^{\perp}$ et pourtant φ est non-dégénérée.

Cela montre l'existence (dans certains cas) de vecteurs x tels que $\varphi(x,x) = q(x) = 0$

déf : La base $(e_1,\dots,e_n)$ de E est dite orthogonale (pour φ) si $\varphi(e_i,e_j)=0$ pour $i\neq j$ (et orthonormée si $\varphi(e_i,e_j)=\delta_{ij}$)

Th : Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une base orthogonale (pour φ).

NB : Dans une telle base $\mathcal{B}$, la matrice de q est diagonale : soit $x\in E$ et $(x_1,\dots,x_n)$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où $\lambda_i \in K$.

Application : Classification affine des coniques :

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel de direction E. Soit $\mathcal{C}$ une conique définie par $\{M\in\mathcal{E} : q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c = 0\}$ (O est une origine de $\mathcal{E}$)

On déf[illegible] la forme quadratique homogénéisée de la conique par $\tilde{q} : E\times K \longrightarrow K$ telle que $\tilde{q}((u,z)) = q(u) + L(u[illegible]z) + cz^2$

On dit que $\mathcal{C}$ est propre si $\tilde{q}$ est non-dégénérée.

Il existe un repère dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une (et une seule) des formes : $x^2+y^2=1$ (ellipse), $x^2-y^2=1$ (hyperbole) ou $y^2=x$ (parabole) si $\mathcal{C}$ est une conique propre d'image non-vide.

Th (orthogonalisation simultanée) $K=\mathbb{R}$

Si q est une f.q définie positive (i.e $q(x)>0$ si $x\neq 0$) et q' une f.q quelconque, alors il existe une base orthonormée pour q qui est orthogonale pour q'.

Applications. Classification euclidienne des coniques

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de direction E.

Si $\mathcal{C}$ est une conique propre d'image non vide, il existe un repère orthonormé dans lequel une équation de $\mathcal{C}$ a une (et une seule) des forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole), $y^2 = 2px$

(où $a, b, p > 0$ et $0 < b \leq a$ si la conique est une ellipse).

• Ellipsoïde de John-Loewner (DEV. 1)

Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

• théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.

b) Isotropie

déf : Un élément $x\in E$ est dit isotrope si $q(x)=0$

Un sous-espace H de E est dit isotrope si $H\cap H^{\perp} \neq \{0\}$, totalement isotrope si $H\subset H^{\perp}$

L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé cône isotrope

Prop : Soit q une f.q. non-dégénérée. Si F est un sous-espace totalement isotrope (seti), alors il est contenu dans un sous-espace totalement isotrope maximal (setim) (au sens de l'inclusion).

De plus, tous les setim de E ont la même dimension

(On peut remarquer que la dimension d'un seti est majorée par $\dim E/2$)

Prop: K est algébriquement clos. Si q et q' sont deux f.q. ayant le même cône isotrope, alors q et q' sont proportionnelles.

3. Classification des formes quadratiques

Position du problème :

déf : Deux f.q., q_1 et q_2, sur E sont dites *équivalentes* s'il existe un automorphisme p de E tel que $q_2 \circ p = q_1$

On veut étudier les orbites pour l'action du groupe des automorphismes de E sur l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E définie par $q \cdot p = q \circ p$ où q est une f.q et $p \in GL(E)$

Un outil est la méthode de Gauss pour la décomposition des formes quadratiques :

Méthode de Gauss : Toute forme quadratique se décompose en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. La méthode de Gauss est effective pour trouver une telle décomposition.

a) $K = \mathbb{R}$

Th. d'inertie de Sylvester : Si q est de rang r, alors q est équivalente à une forme du type : $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ où p est un entier qui ne dépend que de q.

Le couple $(p, r-p)$ est appelé *signature* de q.
2 formes n'ayant pas le m rang ne peuvent être équivalente

Applications : Comptage de racines d'un polynôme (DEV. 2)

Soit $P = X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_m$ à coefficients réels. On note $d_1, \dots, d_m$ les racines (dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité)

Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $s_i = \sum_{k=1}^{m} d_k^i$. On définit une forme quadratique S sur $\mathbb{R}^m$ par $S(u) = \sum_{i,j=0}^{m-1} s_{i+j} u_i u_j$ où $u = (u_0, \dots, u_{m-1})$

Soit (s,t) la signature de S. Le nombre de racines réelles distinctes de P est $s-t$. Le nombre de racines réelles ou complexes distinctes est égal au rang $s+t$.

b) K est quadratiquement clos (i.e tout élément est un carré)

Th : Si q est de rang r, alors q est équivalente à la forme $x_1^2 + \dots + x_r^2$.

c) K est un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$

Préliminaires

- Notons K^2 l'ensemble des carrés de K et K^{*2} l'ensemble des carrés de K^*. On a $\# K^2 = \frac{q+1}{2}$ et $\# K^{*2} = \frac{q-1}{2}$
$(K^{*2}, \times)$ est un sous-groupe de $(K^*, \times)$
- Soient q_1, q_2 deux formes quadratiques non-dégénérées sur E. Si q_1, q_2 sont équivalentes, alors leurs discriminants dans une base B donnée sont égaux dans K^*/K^{*2}.

(DEV3)

Th : Soit $\alpha \in K^* \setminus K^{*2}$.
Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur E.
Alors q est équivalente soit à la forme $x_1^2 + \dots + x_m^2$
soit à la forme $x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 + \alpha x_m^2$

Références : [Perrin] chap. V "Formes sesquilinéaires"
[Goblot] "Algèbre linéaire", Masson, chap. X "Formes quadratiques"
[Lelong-Ferrand, Arnaudiès] tome 1 Algèbre, chap XII "Formes bilinéaires et formes quadratiques"
[Francinou...] "Oraux X-ENS" algèbre 3, pour DEV 1, DEV3 et les résultats sur l'isotropie.
[Audin] "Géométrie", chap sur les coniques et les quadriques