16) Exponentielle de matrices. Applications.

<u>Cadre</u>: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

I. Définition et premières propriétés

1. Propriétés

<u>Prop</u>: La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de $M_n(\mathbb{K})$ qui est complet.

<u>Déf</u>: La somme de cette série, notée $\exp A$, est appelée exponentielle de la matrice A.

<u>Ex</u>: $\exp(\lambda I_n) = (\exp \lambda) I_n$

<u>Prop</u>: $\exp A$ est un polynôme en A

<u>Prop</u>: L'application $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ est continue.

<u>Rque</u>: Si A est une matrice nilpotente, la somme est une somme finie.

<u>Prop</u>: On a $\|\exp A\| \leq \exp \|A\|$

<u>Prop</u>: Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$, c'est-à-dire deux matrices semblables ont des exponentielles semblables

<u>Corollaire</u>: $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$

<u>Prop</u>: Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent alors $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$

<u>C-Ex</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. $A+B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$

$\exp A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$, $\exp B = I_n + B = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

<u>Rque</u> Si A et B commutent alors A et $\exp B$ commutent.

<u>Corollaire</u>: Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, même non inversible, la matrice $\exp A$ est inversible et son inverse est $\exp(-A)$.

<u>Prop</u> Soit $A_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille 2. Alors $\exp : A_2(\mathbb{R}) \longrightarrow O_2^+(\mathbb{R})$ est surjective.

<u>Prop</u> $(\exp A)^* = \exp A^*$. En particulier, l'exponentielle d'une matrice antihermitienne est unitaire et celle d'une matrice hermitienne est hermitienne définie positive.

<u>Prop</u> Si $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\exp A = \operatorname{diag}(\exp\lambda_1, \dots, \exp\lambda_n)$

<u>Csq</u>: Si A est diagonalisable, il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $\exp A = P^{-1} \operatorname{diag}(\exp\lambda_1, \dots, \exp\lambda_n) P$ où les λ_i sont les valeurs propres de A.

2. Décomposition de Dunford.

<u>Th</u> (Décomposition de Dunford): Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique χ_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que:

1. d diagonalisable et n nilpotente
2. $f = d + n$ et $n \circ d = d \circ n$

App : • Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si χ_A est simdé alors :

A diagonalisable $\iff \exp A$ diagonalisable

• Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors : $\exp A = I_n \iff A$ diagonalisable et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

(• $\lim_{t \to +\infty} \exp(tA) = 0 \iff \forall \lambda \in Sp(A),\ Re\,\lambda < 0$ $\quad (A \in M_n(\mathbb{C}))$)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable A diagonalisable $\iff e^A$ diagonalisable

App au calcul d'exponentielle : Soit $F = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ un polynôme annulateur de l'endomorphisme f ayant les mêmes facteurs premiers que χ_f. On décompose $1/F$ en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$:

$$\frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{x_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} \right)$$

Pour tout i, on pose $U_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} x_{ij} (X-\lambda_i)^{\alpha_i - j}$ et $Q_i = \prod_{j \neq i} (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ de sorte que $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$. Si $P_i = U_i Q_i$ les projecteurs p_i sont donnés par $p_i = P_i(f)$ où p_i est la projection sur $N_i = \ker(f-\lambda_i)^{\alpha_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$. Alors on a : $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id) p_i$

d'où :

$$\exp D = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} p_i \quad \text{et} \quad \exp N = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} \right) p_i$$

donc : $\exp f = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left(\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} \right) p_i$

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On a $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$ et on pose $N_1 = \ker(A - 3I_3)$ et $N_2 = \ker(A-2I_3)^2$.

On a alors : $\exp A = e^2 (M - I_3) p_1 + e^3 p_2$.

II Régularité de l'application exponentielle.

Th : L'application $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$ est une application de classe C^1 (et même C^∞). Sa différentielle en 0 est l'identité.

Corollaire : L'exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$ et un voisinage de Id dans $Gl_n(\mathbb{K})$

App : Le groupe $Gl_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits, il en est de même pour tout sous-groupes de $Gl_n(\mathbb{K})$

Déf : Si $A \in \mathcal{B}(Id, 1)$, on appelle $\operatorname{Log} A$ la somme de la série normalement convergente : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A - Id)^n}{n}$

Prop : L'exponentielle réalise un homéomorphisme des matrices nilpotentes d'ordre p sur les matrices unipotentes d'ordre p, dont l'inverse est le logarithme.

Th : L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.

App : • Si $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$, alors il existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tq $A = B^p$

• $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rque : L'exponentielle n'est pas injective. Ainsi l'égalité $\exp A = Id$ n'entraîne pas $A = 0$ comme le montrent l'exemple de $A = \begin{bmatrix} 2ik\pi & 0 \\ 0 & -2ik\pi \end{bmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ et celui de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$, puisque cette dernière est semblable à $\begin{bmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{bmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$.

Prop : $\exp \langle M_n(\mathbb{R}) \rangle = \{ M \in Gl_n(\mathbb{R}),\ \exists\, C \in M_n(\mathbb{R}),\ M = C^2 \}$

III Applications

1. Des homéomorphismes liés à l'exponentielle.

Prop : L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $S(n)$ (resp. $H(n)$) sur l'ensemble $S^{++}(n)$ (resp. $H^{++}(n)$).

App : $Gl_n(\mathbb{R}) \simeq O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $Gl_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$

2. Méthode de calcul de $\exp A$ p… réduction de Jordan

Lemme: Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots A_r \end{pmatrix}$ où les A_i sont des matrices carrées complexes.

Alors $e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & \\ & e^{A_2} & \\ & & \ddots e^{A_r} \end{pmatrix}$

Ppe: Puisque χ_A est scindé ($A \in M_n(\mathbb{C})$), A admet une réduction de Jordan : il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots J_r \end{pmatrix}$ avec $J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_\alpha \end{pmatrix}$

telles que $A = P^{-1}BP$. Or $J_\alpha = \lambda_\alpha I + V_\alpha$ et V_α est nilpotente (il existe p tq $V_\alpha^p = 0$). D'autre part $\lambda_\alpha I$ et V_α commutent donc :

$$e^{J_\alpha} = e^{\lambda_\alpha I} e^{V_\alpha} = e^{\lambda_\alpha} I e^{V_\alpha} = e^{\lambda_\alpha}\left(I + V_\alpha + \dots + \frac{V_\alpha^{p-1}}{(p-1)!}\right)$$

ce qui permet, compte tenu du lemme, le calcul effectif de e^A.

3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Prop: Soit $t \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$

Csq: Si $\forall t$, $\exp(tA) = \exp(tB) \implies A = B$

Rque: Si $X : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, $t \longmapsto X(t)$, on n'a pas toujours $\frac{d}{dt}(\exp X(t)) = X'(t)\exp X(t)$

C. Ex: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

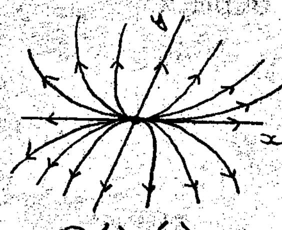
Th: Soit $X' = AX$ un système différentiel linéaire à coefficients constants. ($A \in M_n(\mathbb{C})$, $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$). Alors la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur x_0 ($x_0 \in M_{n,1}(\mathbb{C})$) est :

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Stabilité des … : On se place dans $M_2(\mathbb{K})$. Soit … $_2(\mathbb{K})$ et λ_1, λ_2 ses valeurs propres.

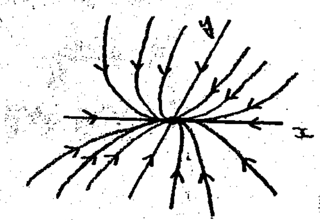
- λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$

  + λ_1 et λ_2 de même signe : on a affaire à un noeud impropre



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

noeud impropre instable



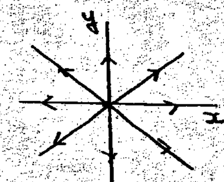
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

noeud impropre stable

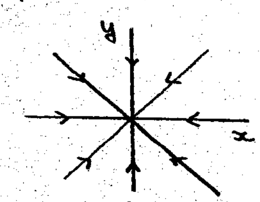
  + λ_1 et λ_2 de signes opposés : il s'agit d'un col (toujours instable)

- λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 = \lambda_2$ et supposons A diagonalisable

On dit qu'on a affaire à un noeud propre.



$\lambda > 0$: noeud propre instable



$\lambda < 0$: noeud propre stable

- λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha > 0$: Foyer instable

$\alpha < 0$: Foyer stable

$\alpha = 0$: centre

<u>Références</u>

Serre, Les Matrices

Griffon,

Gourdon, Algèbre

Mneimné-Testard, Groupes de Lie classique

Demailly,

Objectif Agrégation