128 Endomorphismes nilpotents, endomorphismes trigonalisables

Dans le document, $\mathbb{K}$ est un corps
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

I] Premières définitions, premières propriétés

1) Endomorphismes nilpotents

déf : $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
Le plus petit entier vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence

ex : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 1

théorème : Les conditions suivantes sont équivalentes : ($u \in \mathcal{L}(E)$ fixé)
(i) u nilpotent
(ii) $\exists \mathcal{B}$ base de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ triangulaire supérieure à diagonale nulle
(iii) ______ inférieure ______
[ROU]

corollaire : Dans ces conditions, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $tr(u^p) = 0$

Remarque : Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors la réciproque est vraie et fausse sinon :
[GOU] prendre $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ et $u = Id_{\mathbb{F}_2^2}$.

proposition : $u \in \mathcal{L}(E)$; si u est nilpotent, alors u est non inversible.

2) Polynômes caractéristique et minimal - Trigonalisation [GRI]

proposition-déf : $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie n. Alors $\det(u - X Id)$ est un polynôme de degré n.
On l'appelle polynôme caractéristique de u, noté χ_u.

proposition-déf : $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < +\infty$. Alors l'ensemble des polynômes annulateurs de u : $\{P \in \mathbb{K}[X] : P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par l'unique polynôme unitaire de degré minimal annulant u ;
On l'appelle polynôme minimal de u, noté μ_u

exemple : si u est nilpotent d'indice p, alors $\chi_u(X) = (-X)^n$ et $\mu_u(X) = X^p$.

Remarque : On sait que $\chi_u(u) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, donc μ_u divise χ_u.

déf : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ soit triangulaire.

Rem : • Une matrice étant semblable à sa transposée, triangulaire supérieure suffit.
• nilpotent $\Rightarrow$ trigonalisable
• La diagonalisation est une trigonalisation particulière

proposition (caractérisation de la trigonalisabilité)
$u \in \mathcal{L}(E)$
u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

Rem : Il faut en général spécifier le corps ; par exemple pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; son polynôme caractéristique est X^2+1 non scindé sur $\mathbb{R}$ mais vue dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

II] Trigonalisation et drapeaux [X-E1]

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie n.

déf : Un drapeau de E est une suite croissante de $n+1$ sous-espaces vectoriels $V_0 \subset V_1 \dots \subset V_n$, avec $\dim V_k = k$ pour tout k.

proposition : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau (V_k) de E stable par u [ie $u(V_k) \subset V_k$, $\forall k = 0..n$]

déf : On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base adaptée à un drapeau (V_k) de E si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = V_k$.

lemme : Tout drapeau de E admet une base adaptée

Dans la suite, on va s'intéresser aux matrices inversibles triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On notera : $T_S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$ inversibles, triangulaires supérieures$\}$.
Enfin, pour faciliter les notations on écrira G pour $Gl_n(\mathbb{K})$, P_σ la matrice de permutation associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de E.

proposition : G agit transitivement sur $\mathcal{D}$ (par $A.d = A(d)$)

théorème : (Décomposition de Bruhat)

$Gl_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_S P_\sigma T_S$ et la réunion est disjointe.

autrement dit, $\forall M \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\exists! \sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\exists T_1, T_2 \in T_S$ telles que $M = T_1 P_\sigma T_2$.

Application :
- $\mathcal{D}$ est en bijection avec $G/_{T_S}$
- $\mathfrak{S}_n$ est en bijection avec $\{O(x),\ x \in G/_{T_S} \times G/_{T_S}\}$, où $O(x)$ est l'orbite de x sous l'action naturelle de G sur $G/_{T_S} \times G/_{T_S}$.

Dév^t

III) Éléments propres, sous-espaces stables et commutation

1) Valeurs propres et vecteurs propres

déf :
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est <u>valeur propre de u</u> si $u - \lambda Id$ est non injectif.
- Dans ce cas, pour $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, x est appelé <u>vecteur propre</u> de u associé à λ.
- L'ensemble des valeurs propres de u, noté $\mathfrak{S}(u)$, est appelé spectre de u sur $\mathbb{K}$.

proposition : $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et <u>seulement</u> si $\chi_u(\lambda) = 0$.

proposition : Si u est trigonalisable, de matrice triangulaire T dans une base adaptée. Alors les valeurs propres de u sont les éléments diagonaux de T.
En particulier $\det u = \det T = \prod_{\lambda \in \mathfrak{S}(u)} \lambda$; $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} T = \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}(u)} \lambda$.

cas particulier des endomorphismes nilpotents :
- si u est nilpotent alors $\mathfrak{S}(u) = \{0\}$.
- si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\mathfrak{S}(u) = \{0\} \Leftrightarrow u$ nilpotent, ce qui est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple : prendre $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{S}_{\mathbb{R}}(M) = \{0\}$ et M n'est pas nilpotente.

application :
lemme : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; si $\operatorname{rg} M < n$ alors $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M \in Gl_n(\mathbb{C})$

proposition : soit φ endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; si $Gl_n(\mathbb{C})$ est stable par φ, alors φ conserve le rang.
[X-E1]

Dév^t

---

2) Sous-espaces stables, propres, caractéristiques

déf : On dit qu'un sous-espace F de E est <u>stable</u> par u si $u(F) \subset F$

déf : Soit $\lambda \in \mathfrak{S}(u)$; alors $E_\lambda^u = \ker(u - \lambda Id)$ est appelé <u>sous-espace propre</u> de u associé à λ.

déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé :
$\chi_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$ avec les λ_i 2 à 2 distinctes.
Alors $F_\lambda^u = \ker(u - \lambda_i Id)^{m_i}$ est appelé <u>sous-espace caractéristique</u> de u associé à λ.

Rem : Ces notions sont bien distinctes ;
Prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: $\chi_A = -(X-1)^2(X+2)$: $A \sim A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
$E_1^A = \operatorname{vect}(e_1) \neq F_1^A = \operatorname{vect}(e_1, e_2)$;

3) Commutation et réduction. [TAU] - [GRI].

lemme (des noyaux)
soit $u \in \mathcal{L}(E)$; soit $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
si $P = Q_1 \dots Q_r$ avec les Q_i 2 à 2 premiers entre eux, alors
$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(Q_i(u))$.

proposition : $u \in \mathcal{L}(E)$; on note F_i ($i = 1..p$) les sous-espaces caractéristiques de u.
- si F est un sous-espace de E stable par u alors $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap F_i$.
- si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes trigonalisables commutant deux à deux, alors tout sous-espace ~~stable~~ caractéristique par u_i l'est par u_j, $\forall j \neq i$, et les u_i possèdent une base commune de trigonalisation.

Théorème : (décomposition de Dunford)

Soit u trigonalisable, alors il existe un unique couple $(n,d) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
(i) $u = d + n$
(ii) d diagonalisable et n nilpotente
(iii) $d \circ n = n \circ d$
De plus n et d sont des polynômes en u.

Remarque : utilisation pratique pour le calcul d'exponentielles de matrice.
application à la résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$. a pour solution $x(t) = e^{tA} x_0$.

[GRI]

corollaire : (i) $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable
(ii) $e^u = Id_E \iff u$ diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

IV] Réductions d'endomorphismes : un peu plus loin [GRI]-[AUD]

Lemme (diagonalisation par blocs)

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec E_i stable par u $\forall i$, si $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i $\forall i$, alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ de E est triangulaire par blocs avec chaque bloc égal à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i} u_{|E_i}$.

1) Diagonalisation par blocs triangulaires

Théorème : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{m_i}$ est scindé, alors il existe une base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ de E (où $\mathcal{B}_i$ est base de $F^u_{\lambda_i}$) telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \lambda_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} \lambda_p & & * \\ 0 & \ddots & \lambda_p \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}m_1 \\ \vdots \\ \}m_p \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ 0 & \ddots & \lambda_i \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}\, u_{|F^u_{\lambda_i}}.$$

2) Réduction de Jordan.

L'ultime réduction possible pour un endomorphisme trigonalisable est la réduction de Jordan suivante :

en notant $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{m_i}$ on a le résultat du théorème suivant.

Théorème : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que / unicité.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \begin{matrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\gamma_1}(\lambda_1) \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} J_1(\lambda_p) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\gamma_p}(\lambda_p) \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}m_1 \\ \vdots \\ \}m_p \end{array}$$

où $J_i(\lambda_j)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$ et $\gamma_i = \dim E_{\lambda_i}$.

En particulier, si u est nilpotent, on obtient une diagonale nulle et des 1 ou des 0 en sur-diagonale.

Cette réduction facilite également le calcul des exponentielles et puissances de matrices.

3) Représentation canonique des transformations orthogonales

Théorème : Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que dans cette base M a pour représentation

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & R_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & R_s \end{pmatrix}$$

où $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

applications : 1) $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs
2) $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective [AUD]

[ROU] : Alg. lin., H. Roudière
[GOU] : Alg. X. Gourdon
[GRI] : Alg. lin., J. Grifone
[X-E1] : Alg. 1, Oraux X-ENS
[TAU] : Alg. lin., Cours, Tauvel
[AUD] : Géométrie, Audin