# Leçon 126 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $n = \dim_{\mathbb{K}} E$.

## I Généralités : définitions et premières propriétés.

### 1) Sous espaces propres [Gour]

Déf : Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de $f$ si $f - \lambda Id_E$ est non injective.
Autrement dit s'il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On dit alors que $x$ est vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Déf.prop. : Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E, f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda Id_E)$ est un sous-espace stable par $f$ appelé sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Théorème : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux de $f$. Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Prop : Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors tout sous espace propre de l'un est stable par l'autre.

### 2) Lien avec les polynômes caractéristique et minimal. [Gour].

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de $A$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par : $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Rq : * $P_A(0) = \det(A)$ ; $P_A(X) = P_{{}^tA}(X)$

* Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle le polynôme caractéristique de $f$. On le note $P_f$.

Prop : $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $f \iff P_f(\lambda) = 0$

Prop Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $F \neq \{0\}$ un sev strict de $E$ stable par $f$.
Alors $g = f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $P_g \mid P_f$.

Rq : $P_f$ est un polynôme annulateur de $f$ i.e. $P_f(f) = 0$. (Cayley-Hamilton).

Déf-prop : On appelle polynôme minimal de $f$, le polynôme unitaire $\Pi_f$ qui engendre $I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(f) = 0\}$. $\Pi_f$ est le polynôme unitaire de plus bas degré annulant $f$.
De plus, si $Q \in \mathbb{K}[X]$ annule $f$ alors $\Pi_f \mid Q$.

Prop : Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $f$ si et seulement si $\lambda$ est racine de $\Pi_f$.

### 3) Définition : [Gour]

* Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable si $E$ est somme directe d'un nombre fini de sous-espaces propres.
Ainsi d'après le théorème ci dessus, $f$ est diagonalisable s'il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.
Autrement dit $f$ est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

* On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si $A$ est semblable à une matrice diagonale.

Rq : $f$ diagonalisable $\iff$ la matrice de $f$ dans une base quelconque est diagonalisable.

## II Diagonalisabilité.

### 1) Critères de Diagonalisabilité. [Gour] [Grif].

Une condition suffisante : Si $P_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples alors $f$ est diagonalisable.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ [Guin].

Prop : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de $P_f$ d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ alors
$$\dim E_\lambda \leq m.$$

Première CNS : $f$ est diagonalisable si et seulement si $P_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine $\lambda_i$ de $P_f$ d'ordre de multiplicité $m_i$, $m_i = \dim E_{\lambda_i}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable [Guin].

Prop : Soit $Q$ un polynôme annulateur de $f$. Alors les valeurs propres de $f$ figurent parmi les racines de $Q$.

**Lemme des noyaux** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, les $P_i$ étant premiers entre eux deux à deux.

Alors $\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$

**Deuxième CNS** : $f$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.

**Exemples** : * Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

* Si $G$ est un sous-groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$ alors tous les éléments de $G$ sont diagonalisables.

**Conséquence** : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et $F$ est un sev stable par $f$ alors $f_{|F}$ est aussi diagonalisable.

**Application** : diagonalisation simultanée.

Si $f$ et $g$ dans $\mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de $f$ et $g$.

**Exemple (suite)** : Si $G$ est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ alors tous les éléments de $G$ diagonalisent dans une même base.

D'où la propriété suivante : les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini sont toutes de dimension 1.

**Troisième CNS** : Un endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

## 2) Propriétés illustrant l'intérêt de la diagonalisation.

### a) Propriété topologique : [Gour]

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Théorème** : $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Remarque** : En revanche $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

### b) Décomposition de Dunford. [Gour]

**Théorème** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme caractéristique $P_f$ de $f$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec $d$ diagonalisable et $n$ nilpotente tel que :

i) $f = d + n$

ii) $n \circ d = d \circ n$.

**Rq** : De plus $d$ et $n$ sont des polynômes en $f$.

**Applications** : * $f$ est diagonalisable $\Leftrightarrow e^f$ est diagonalisable ; pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $E$ $\mathbb{C}$-ev.

* $e^f = id \Leftrightarrow f$ diagonalisable et $\operatorname{Spec}(f) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ ; pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $E$ $\mathbb{C}$-ev. [OA]

### c) Calcul des puissances ou de l'exponentielle d'un endomorphisme.

**Théorème** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Soit $P = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ tel que $P(A) = 0$.

Alors il existe $U_1, \dots, U_s$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i(X) Q_i(X)$ où $Q_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{s} (X - \lambda_j)$. On a alors $p_i = U_i(A) Q_i(A)$ qui est la matrice de la projection sur $E_{\lambda_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n p_i$ ; $\exp(A) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} p_i$.

**Rq** : Il existe un résultat semblable utilisant la décomposition de Dunford dans le cas d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé.

# III Famille d'endomorphismes diagonalisables.

On se place dans le cas où $E$ est un espace euclidien ou hermitien.
On note $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire euclidien (resp. hermitien) associé et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

## 1) Endomorphismes auto-adjoints. [Gour]

**Déf-prop** : Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{L}(E)$. $f$ et $g$ sont dits adjoints si $\forall (x, y) \in E^2$,

$(f(x), y) = (x, g(y))$ (1)

L'endomorphisme $f$ étant donné, il existe un unique endomorphisme vérifiant (1). On l'appelle adjoint de $f$ et on le note $f^*$.

**Déf** : $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $f^* = f$ i.e. $\forall \mathcal{B}$ base orthonormée de $E$, ${}^t\overline{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

**Théorème** : Soit $f$ autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ et de plus les valeurs propres sont réelles.

Traduction matricielle : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique réelle (resp. hermitienne). Alors il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ orthogonale (resp. unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ avec $D$ diagonale réelle.

Corollaire 1 : Soit $\Phi$ une forme quadratique (resp. hermitienne) sur un espace euclidien (resp. hermitien) $E$. Alors il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $\Phi$ est diagonale réelle.

Corollaire 2 : Soient $M$ et $N$ deux matrices symétriques (resp. hermitiennes) telles que $M$ soit définie positive. Alors il existe $C$ inversible telle que :

$$C^*MC = I_n \text{ et } C^*NC = D \text{ où } D \text{ est diagonale réelle.}$$

Application : Calcul des directions principales d'une ellipse. [Paug]

Exemple : Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse $(E)$ définie par $q_2(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$.

Alors la longueur du demi grand axe est $a = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}$

——〃—— petit axe est $b = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}$

et la direction du grand axe de $(E)$ est donnée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

——〃—— petit axe de $(E)$ est donnée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$. [Paug]

## 2) Endomorphismes normaux. [Gour]

$E$ est maintenant un espace hermitien.

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $f$ est normal

ii) $f$ se diagonalise dans une base orthonormale de $E$.

iii) $f$ et $f^*$ diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Rq : Dans $\mathbb{R}$, $f$ normal n'est pas nécessairement diagonalisable.

Traduction matricielle : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale $\iff \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $P^*MP$ est diagonale.

Cas particulier des endomorphismes unitaires :

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est unitaire si $\|f(x)\| = \|x\| \ \forall x \in E$.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise $f$ et toutes les valeurs propres de $f$ sont de module égal à 1.

Traduction matricielle : Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire. Alors il existe une matrice unitaire $P$ telle que $P^{-1}UP = P^*UP = \mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ avec $\theta_i \in \mathbb{R}$.

# IV Exemples d'utilisation des endomorphismes diagonalisables.

## 1) Résolution d'un système de suites récurrentes. [Grif]

Exemple : Déterminons les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad (\ast\ast)$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Le système $(\ast\ast)$ s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ d'où $X_{n+1} = A^n X_0$

et on trouve après calcul : $\begin{cases} u_n = 3 \times 2^{n+1} - 4 \times 3^n \\ v_n = -3 \times 2^n + 4 \times 3^n \end{cases}$.

## 2) Solutions d'un système linéaire autonome : [Grif].

Soit $(E)$ le système différentiel $\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 = c x_1 + d x_2 \end{cases}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ce système s'écrit sous forme matricielle $\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Si $A$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et si $v_1$ et $v_2$ sont des vecteurs propres associés à celles-ci trois cas sont possibles :

* Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réelles et distinctes : $X = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$
* Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont complexes conjuguées : $X = c e^{\lambda t} v_1 + \bar{c} e^{\bar{\lambda} t} v_2$ $(c, \bar{c}) \in \mathbb{C}^2$
* Si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont égales : $X = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2$ $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

Rq : Si $A$ non diagonalisable et $\lambda$ valeur propre double :

$$X = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{C}$$

L'étude des cas permet de déterminer les trajectoires.

## 3) Un problème de dénombrement. [Deb.-Las]

Le nombre de chemins de longueur $n \in \mathbb{N}$ exactement sur les arêtes d'un cube joignant deux sommets opposés est donné par le coefficient d'indice $(1,1)$ de la matrice $A^n$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Réf : [Gour] : Algèbre, Gourdon.

[Grif] : Algèbre linéaire, Griffone.

[Guin] : Algèbre et géométrie MP, Guinin Joppin Brial.

[OA] : Objectif Agrégation.

[Paug] : Questions délicates en algèbre et géométrie. Paugam.

[Deb-Las] : Polycopié de Debarre et Laszlo les-mathématiques.net.