120 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL (on se limitera au cas de la dimension finie). RANG. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

E $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-ev)
$(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est dite presque nulle si tous ses éléments sauf un nombre fini, sont nuls.

I) THÉORIE DE LA DIMENSION [GOB] [GOU1]

1) Définitions, propriétés

* **Déf**: Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est génératrice si $\forall x\in E$, $\exists (\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

- $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est libre si $\forall (\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle, $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i\in I, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

La famille est dite liée si elle n'est pas libre.

Rq: - Une famille contenant 0_E est liée.
- $\emptyset$ est libre.
- $\emptyset$ est génératrice si $E = \{0\}$.

* **Déf**: $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. On note $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$ le plus petit sous-ev de E contenant $(x_i)_{i\in I}$.

* **Prop**: Une sous-famille d'une famille libre est libre.
Une sur-famille d'une famille liée est liée.

* **Prop**: $x\in E$, $(x_i)_{i\in I} \in E^I$
$(x_i)_{i\in I}\cup\{x\}$ libre $\Leftrightarrow$ x n'est pas combinaison linéaire des x_i, $i\in I$

* **Déf**: Une famille de vecteurs de E est une base si c'est une famille libre et génératrice.

ex: - $\{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$
- $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de $\mathbb{K}[X]$
- $\{x\mapsto e^{\lambda x}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ n'est pas une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (pas génératrice)

* **Prop**: $e = (e_i)_{i\in I}$ base de E.
Alors $\forall x\in E$, $\exists! (\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle, $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$
($(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des composantes de x dans e).

* **Déf**: [dimension finie]
On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice de cardinal fini.
Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie. (On notera resp. $\dim E < +\infty$ et $\dim E = +\infty$)

2) Dimension

* **Lemme**: Si E possède une famille génératrice de cardinal k, alors toute famille de cardinal $k+1$ est liée.

* **Théorème** [de la base incomplète]
Soit E de dimension finie, $\mathcal{G}$ famille génératrice finie, $\mathcal{L}$ famille libre / $\mathcal{L}\subset\mathcal{G}$.
Alors $\exists$ base $\mathcal{B}$ / $\mathcal{L}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{G}$.

Rq: Résultat valable en dimension infinie (sans l'hyp. $\mathcal{G}$ finie) mais repose sur l'axiome du choix.

* **Corollaire**: $\dim E < +\infty$. Alors:
- E admet une base finie;
- Ttes les bases de E ont le même cardinal;
- Tte famille libre peut être complétée en une base;
- De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Rq: - Un A-module de type fini n'admet pas nécessairement de base (considérer le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$)
- Si M est un A-module de type fini qui possède une base, ttes les bases de M ont même cardinal mais, si l'on considère $M=\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}$-module:
  - $\{2\}$ est libre et ne peut être complétée en base,
  - $\{2,3\}$ est génératrice mais on ne peut extraire de base. [OBJ]

Appl: $\exists$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices inversibles. [OBJ]

* **Déf**: [dimension d'un espace vectoriel de dimension finie]
$\dim E < +\infty$.
On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou $\dim E$) le cardinal d'une base du $\mathbb{K}$-ev E. On dit que E est de dimension $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Rq: Si $E = \{0\}$, $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$ ($\emptyset$ base)
- $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$
- $\dim_{\mathbb{K}} E \in \mathbb{N}$ donc peut servir d'outil de démo par récurrence (dans la réduction, le théorème de Carathéodory ...).

ex: - $\mathbb{K}^n$ est de dimension n
- $\mathbb{K}_{n-1}[X] = \{P\in\mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n-1\}$ est de dimension n
- $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\}$ est de dimension 2 $(a,b\in\mathbb{C})$.
- L'ensemble des solutions du système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $t\mapsto A(t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue est de dimension n
- $\dim E < +\infty$, $\dim F < +\infty$ sur $\mathbb{K}$.
Alors $\dim_{\mathbb{K}} E\times F = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F$.

* **Corollaire**: - Si $\dim E = n$, $\mathcal{L}$ libre, $\mathcal{G}$ génératrice alors $|\mathcal{L}| \leq n$, $|\mathcal{G}| \geq n$.
- Si $\mathcal{F}$ famille de vecteurs de E, $|\mathcal{F}| = n$ alors $\mathcal{F}$ base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ génératrice.

ex: $\{(2,-7{,}4,\sqrt{\pi}^{\,1}),(2010,2011,0),(e,0,0)\}$ libre dans $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Sous-espaces vectoriels (sev)

Ici, $\dim E < +\infty$.

* **Prop** : Soit F sev de E.
Alors $\dim F < +\infty$, $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ et
$F = E \iff \dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$

ex : - $u \in \mathcal{L}(E)$
$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est de dimension finie car c'est un sev de $\mathcal{L}(E)$ (qui est de dimension finie ; voir ci-après).

- $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Alors $f = 0$ ou f est surjective.

* **Prop** : F sev de E. Alors F admet un supplémentaire.
* **Prop** : F, G sev de E en somme directe.
Alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Appl : Formule de Grassmann : F, G sev de E.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

II) APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION

[GOUR], [TOUT]

1) Généralités

* **Théo** : - $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est déterminée par l'image d'une base
- $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective ssi l'image d'une base de E est une base de F

* **Prop** : E, F $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
Alors $\dim \mathcal{L}(E,F) < +\infty$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} E \dim_{\mathbb{K}} F$.

Appl : $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $P(u) = 0$.
($\dim E < +\infty$)

* **Théo** : E, F $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
E et F isomorphes $\iff \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$

* **Corollaire** : $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2) Rang

E, F, G $\mathbb{K}$-ev

* **Déf** : - $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On appelle rang de $(x_i)_{i \in I}$
$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I})$ (avec $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$ si dimension)

- Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle rang de u noté $\mathrm{rg}\, u$:
$\dim_{\mathbb{K}} u(E) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, u$.

* **Prop** : Si $\dim E < +\infty$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\mathrm{rg}(u) \leq \dim_{\mathbb{K}} E$.

Rq : $\mathrm{rg}(u) < +\infty$ dès que E ou F est de dimension finie.

* **Théorème** : $u \in \mathcal{L}(E,F)$
$\mathrm{Im}\, u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$.

* **Théorème** : [du rang]
$\dim E < +\infty$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\, u$

* **Corollaire** : E, F de dim finie, $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors u bijective $\iff$ u injective $\iff$ u surjective.

Rq : - u bijective $\iff \mathrm{rg}\, u = \dim_{\mathbb{K}} E$
- $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u bijective $\iff u$ inj $\iff u$ surj.
($\dim E < +\infty$)
- Résultat faux en dim ∞ : $\begin{array}{l}\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P'\end{array}$, $\begin{array}{l}\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP\end{array}$

Appl : 1) polynôme d'interpolation de Lagrange :
$\begin{cases} a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} & \text{2 à 2 distincts} \\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K} \end{cases}$
Alors $\exists !\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

2) A $\mathbb{K}$-algèbre commutative de dimension finie. [OBJ]
Alors A intègre $\iff$ A corps.

* **Prop** : E, F, G de dim finie, E', F' $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
- $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$
- $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\varphi_1 \in GL(E,E')$, $\varphi_2 \in GL(F,F')$.
Alors $\mathrm{rg}(\varphi_2 \circ u \circ \varphi_1) = \mathrm{rg}(u)$.

* **Déf** : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A noté $\mathrm{rg}\, A$ est le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.

* **Prop** : Si $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\mathcal{B}_1$ base de E, $\mathcal{B}_2$ base de F, alors $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, u$.

* **Déf** : $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$A \sim B \iff \exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$, $A = PBQ$
$\sim$ est une relation d'équivalence.

* **Déf** : $J_r(n,p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$r \leq \min(n,p)$
$\mathrm{rg}(J_r(n,p)) = r$

* **Prop** : $p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur ($p^2 = p$). Alors $\mathrm{tr}\, p = (\mathrm{rg}\, p) 1_{\mathbb{K}}$.

Appl : Théorème de Molien] DEV [LEI]

On note A_k l'espace des polynômes homogènes de degré k dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Soit V $\mathbb{C}$-ev de dimension n, $G \subset GL_n(V)$ sous-groupe fini.
G agit sur A_k via $\sigma_g(P)(X_1, \dots, X_n) = P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))$.
Notons $A_k^G = \{P \in A_k \mid \forall g \in G,\ \sigma_g(P) = P\}$.
Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dim(A_k^G) X^k = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{id} - Xg)}$

* **Théorème** : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$
$\mathrm{rg}(A) = r \iff A \sim J_r(n,p)$

* **Corollaire** : $A \sim B \iff \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$
* **Corollaire** : $\mathrm{rg}({}^t A) = \mathrm{rg}(A)$

3) Dualité

$\dim E < +\infty$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

* **Théorème** : $\dim E^* = \dim E$

Rq : $\begin{cases} E \to E^{**} \\ x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{cases}$ isomorphisme canonique entre E et E^{**}.

* **Déf :** $A \subset E$, $B \subset E^*$

$A^\perp := \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0 \}$ sev de E^*

$B^0 := \{ x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0 \}$ sev de E

Si F sev de E, G sev de E^*, $\begin{cases} \dim F + \dim F^\perp = \dim E \\ \dim G + \dim G^0 = \dim E \end{cases}$.

Appl : $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ / $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$.

Alors $\dim_{\mathbb{K}} \{ x \in E \mid \forall i \in [\![1,p]\!], \varphi_i(x) = 0 \} = n - r$.

III) ANALYSE ET DIMENSION [GOU2]

Ici $\dim E < +\infty$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

* **Théorème :** Ts les normes sont équivalentes.

Rq : Faux sur $\mathbb{Q}^2$ comme $\mathbb{Q}$-ev : $\|\cdot\|_1$ et $N(x,y) = |x + \sqrt{2} y|$ ne sont pas équivalentes.

* **Corollaire :** $u \in \mathcal{L}(E, F)$, F evn (ev normé). Alors u est continue.

Rq : Faux en dim ∞ : $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ pour $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas continue.

* **Corollaire :** Les parties compactes de E sont les fermés bornés.

* **Corollaire :** E est complet.

Csq : Un sev de dim finie est fermé.

* **Théorème de Riesz**

E evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

E de dim finie $\iff$ $\overline{B}(0,1)$ compacte

Rq : – $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = 1$ mais $\overline{B}(0,1)$ pas compacte.

– $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = +\infty$ mais $\overline{B}(0,1)$ compacte.

* **Théorème** [des extrema liés] [GOU2]] DEV

$U \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $p \geq 1$; $f, g_1, \dots, g_p \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Soit $A = \{ x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0 \}$.

Si $f_{|A}$ admet un extremum relatif en $a \in A$, et si $(dg_{1,a}, \dots, dg_{p,a})$ est libre, alors $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p$ /

$df_a = \sum_{i=1}^p \alpha_i \, dg_{i,a}$

IV) EXTENSIONS DE CORPS ET DIMENSION [GOU1]

On dit que L est une extension de K si $K \subset L$ et on note $L_{|K}$.

Rq : L est muni d'une structure de K-ev.

On note $[L:K] = \dim_K L$.

On dit que $L_{|K}$ est finie si $[L:K] < +\infty$.

* **Théorème :** $K \subset L \subset M$ corps.

$[M:K] < +\infty \iff [M:L] < +\infty$ et $[L:K] < +\infty$

Alors on a $[M:K] = [M:L][L:K]$.

* **Déf :** $K \subset L$

– $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il $\exists P \in K[X] \setminus \{0\}$, $P(\alpha) = 0$.

– $L_{|K}$ est algébrique si $\forall \alpha \in L$, α est algébrique sur K.

– Soit φ l'unique homomorphisme $K[X] \to K[\alpha]$ / $\varphi(X) = \alpha$. Pour α algébrique, on note $P_{min}(\alpha \mid K)$ l'unique polynôme irréductible unitaire / $\ker \varphi = (P_{min}(\alpha \mid K))$.

* **Prop :** $K \subset L$, $\alpha \in L$

α algébrique $\iff$ $K[\alpha] = K(\alpha)$

$\iff$ $\dim_K K[\alpha] < +\infty$

Dans ce cas, $\dim_K K[\alpha] = \deg P_{min}(\alpha \mid K)$

* **Prop :** $L_{|K}$ finie $\Rightarrow$ $L_{|K}$ algébrique

$L_{|K}$ finie $\iff$ $\exists a_1, \dots, a_n \in L$, algébriques sur K, $L = K[a_1, \dots, a_n]$.

Ex : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) : \mathbb{Q}] = ?$

– $P_{min}(\sqrt[3]{2} \mid \mathbb{Q}) = X^3 - 2 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$

– $P_{min}(j \mid \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = X^2 + X + 1 \Rightarrow \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]}_{=2}$

et par multiplicativité, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) : \mathbb{Q}] = 6$.

* **Théorème :** L'ensemble des éléments algébriques de $L_{|K}$ est un sous-corps de L.

Biblio :

[GOB] : Rémi Goblot, Algèbre linéaire

[TOUT] : Tout en un, maths, MPSI-PCSI

[GOU1] : Gourdon, Algèbre

[GOU2] : Gourdon, Analyse

[OBJ] : Objectif Agrégation

[LEI] : Leichtnam, Exercices corrigés X/ENS, tome Algèbre et géométrie