# 120 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera à la dimension finie). Exemples et application

Dans la suite, $k$ est un corps commutatif et $E$ un espace vectoriel sur $k$. On suppose connues les notions de familles libres, liés, génératrices, de combinaisons linéaires et de Vect. Un espace vectoriel est dit de <u>dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice. On supposera toujours $E$ de dimension finie et $E \neq \{0\}$. On suppose aussi connue la notion d'isomorphisme.

## I - Espaces vectoriels de dimension finie, sous espaces vectoriels

On appelle <u>base</u> de $E$ une famille libre et génératrice.

**Prop** $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ ssi $\forall x \in E, \exists! (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in k^n /$ $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

**Ex** 1. $(e_i)_{1 \le i \le n}$ où $(e_i)_j = \delta_{i,j}$ est une base de $k^n$

2. $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $k_n[X]$

**Prop** Si $\mathcal{L} \subseteq E$ est libre et si $x \in E$, alors $\mathcal{L} \cup \{x\}$ libre ssi $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.

**Prop** Une famille libre (resp. génératrice) est une base ssi elle est maximale (resp. minimale)

**Prop** Si $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{G}$ génératrice alors $|\mathcal{L}| \le |\mathcal{G}|$. Si $|\mathcal{G}| = n$ alors toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.

<u>Théorème de la base incomplète</u> Si $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{G}$ génératrice avec $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ alors il existe une base $B$ telle que : $\mathcal{L} \subseteq B \subseteq \mathcal{G}$.

↳ <u>Application</u> : Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de matrices inversibles.

**Cor** Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base, de cardinal unique.

**Déf** On appelle dimension de $E$, notée $\dim_k E$ le cardinal d'une base de $E$.

**Rq** Cette notion dépend de $k$

**Ex** $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim(S_n(k)) = \frac{n(n+1)}{2}$

$\dim\{A \in \mathcal{M}_n(k) \,/\, \mathrm{trace}\, A = 0\} = n^2 - 1$

**Prop** Soit $(F_i)_{1 \le i \le r}$ des sev de $E$ alors : $\dim F_i \le \dim E$ pour tout $i$. Et : $\dim(F_1 + \dots + F_n) \le \dim F_1 + \dots + \dim F_n$ avec égalité ssi la somme est directe. De plus $\bigcap_{i=1} F_i$ est un sev de $E$ vérifiant : $\dim\left(\bigcap_{i=1} F_i\right) \le \min_{i \in \mathbb{N}_n} (\dim F_i)$

**Prop** Tout sev $F$ de $E$ admet un <u>supplémentaire</u> $G$, ie un sev de $E$ tel que $\begin{array}{l} F \times G \to E \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \end{array}$ soit un isomorphisme et alors $\dim E = \dim F + \dim G$

<u>Formule de Grassmann</u> Si $F, G$ sevs de $E$, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

**Prop** Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.

**Prop** Soit $F$ un sev de $E$ alors $x \sim y$ ssi $x - y \in F$ est une relation d'équivalence et $E/F := E/\sim$ est un sev de $E$ de dimension finie, isomorphe à un supplémentaire de $F$ dans $E$ dont la dimension, ou <u>codimension</u> de $F$ vérifie :

$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$

**Déf** Un hyperplan est un sev de codimension 1.

**Prop** Pour $F$ sev de $E$, l'ensemble des supplémentaires de $F$ (de cardinal <u>au moins</u> 2) est un espace affine de direction $\mathrm{Hom}_k(E/F, F)$.

**Prop** Soit $(E_i)_{1 \le i \le n}$ des espaces vectoriels de dimension finie, alors : $\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i$

**Rq** Puisque la dimension est un entier naturel, elle permet des preuves par récurrence.

↳ <u>Application</u> : - caractérisation de la trigonalisabilité
- diagonalisation dans le groupe orthogonal d'un endomorphisme symétrique

Dans la suite F désigne un $k$-ev de dimension finie. On s'intéresse aux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ en particulier pour $F = k$ ou $F = E$

## II – Étude des applications linéaires par le rang et le calcul matriciel

**Thm** $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par l'image d'une base.

**Cor** $f \in \mathcal{L}(E)$. $f$ envoie une base sur une base (ssi) $f$ inversible

↳ **Application** $\begin{array}{l} GL(E) \times E \to E \\ (f, v) \mapsto f(v) \end{array}$ est une action de groupes à deux orbites

**Prop** $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

**Dualité/Orthogonalité** **Thm** Avec $E^* = \mathcal{L}(E,k)$ on a :
$\dim E = \dim E^*$ ; $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$ pour F sev de E et : $\dim E = \dim G + \dim G^{\circ}$ pour G sev de $E^*$

**Prop** $\varphi \in E^*$ alors $\varphi$ est ou nulle ou surjective.

**Prop** Si $\dim E$ qcq alors si $(\varphi_i)_{1 \le i \le n} \in E^{*n}$ libre vérifie $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i = \{0\}$ alors E est de dimension finie $n$.

**Rang** **Défs** Soit $(u_i)_{1 \le i \le p} \in E^p$, alors son rang est défini par la dimension de son Vect. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et B une base de E alors le rang de $f$ et le rang de $f(B)$ soit $\dim \operatorname{Im} f$ (car $\operatorname{Im} f$ est un sev de dimension finie). Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes soit le rang de l'application linéaire associée. On le note toujours rg.

**Prop** Soit $\mathcal{F}$ une famille de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors :
i) Si $\mathcal{F}$ de rang fini, $f(\mathcal{F})$ aussi et $rg(u(\mathcal{F})) \le rg(\mathcal{F})$
ii) $f$ est de rang fini et $rg(f) \le \dim E$ avec égalité (ssi) $f$ injective
iii) $rg(f) \le \dim F$ avec égalité (ssi) $f$ surjective

**Rq** $rg\, f$ est fini dès que E ou F est de dimension finie

**Théorème du rang** Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ; $\dim E = \dim(\ker f) + rg\, f$
(rmb : $\ker f$ sev de E)

**Cor** Si $f \in \mathcal{L}(E)$. $f$ injective $\iff$ $f$ surjective $\iff$ $f$ bijective

↳ **Application** (Soit de Lagrange) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Considérons $a_1, \dots, a_p \in k$ 2 à 2 $\neq$ et $b_1, \dots, b_p \in k$ alors : $\exists! P \in k_p[X]$ tel que : $\forall i \in \mathbb{N}_p$ ; $P(a_i) = b_i$

**Thm** Le rang est invariant pour l'action par conjugaison de $GL(E)$ sur $\mathcal{L}(E)$, ie constant sur les orbites de similitude

**D'un point de vue (plus) matriciel**

**Prop** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ et $A'$ sa réduite échelonnée alors :
$$rg\, A = rg\, A' \text{ (lecture directe)}$$

**Thm** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ de rang $r$, alors A est équivalente à $J_r$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **Cor** A équivalente à B (ssi) $rg\, A = rg\, B$

↳ **Applications** 1) Si $car(k) = 0$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ / $p^2 = p$ alors $tr(p) = rg(p)$

2) G sg fini de $GL(E)$ alors $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(g) = \dim(E^G)$
où $E^G = \{x \in E / \forall g \in G ; g(x) = x\}$

DVPT

3) **Thm de Molien** Soit $A_k$ les polynômes homogènes de degré $k$ sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, E $\mathbb{C}$-ev de dimension $n$ et G sg groupe fini de $GL(E)$. G agit sur $A_k$ par : $\sigma_g(P)(X_1, \dots, X_n) = P\left(\sum_j u_{1j} X_j, \dots, \sum_j u_{nj} X_j\right)$ où $g \in G$ et $g = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$. Alors :
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - zg)} = \sum_{k \ge 0} \dim(A_k^G) z^k \text{ pour } |z| < 1$$

4) Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(k)$ intersecte $GL_n(k)$.

**Prop** Les colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(k)$ sont une base de $k^n$ $\iff$ $M \in GL_n(k)$

↳ **Application** $|GL_2(\mathbb{F}_p)| = p(p+1)(p-1)^2$

**Prop** Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ de polynôme minimal $\pi_A$ alors :
$\deg(\pi_A) = rg(1, A, \dots, A^{n-1})$

**Rq** La dimension des solutions d'un système linéaire est lié au rang de sa matrice.

(Ex) $rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = a \\ 4y + 2z = b \\ 2x + y + 8z = \end{array}\right)$ a une solution unique

**Déf** $f \in \mathcal{L}(E)$ est <u>cyclique</u> (ssi) $\exists x \in E \,/\, E = \{P(f)(x),\ P \in k[X]\}$

**Thm** (<u>Invariant de similitude</u>) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F_1, \dots, F_r$ sev de $E$ stables par $f$ tels que :

i) $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$

ii) $\forall i \in \mathbb{N}_r$, $f|_{F_i}$ est cyclique dans $\mathcal{L}(F_i)$, $f_i := f|_{F_i}$

iii) Avec $P_i := \pi_{f_i}$, on a $P_{i+1} \mid P_i$ pour $i \in \mathbb{N}_{r-1}$

Alors la suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}_r}$ ne dépend que de $f$ et non du choix de la décomposition. ↳ <u>Application</u> : Réduction de Frobenius

Déterminant | **Prop** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(k)$ est de rang $r$ (ssi) tous les déterminants extraits de $A$ de taille $r+1$ sont nuls et s'il en existe un de taille $r$ non nul.

↳ <u>Applications</u> 1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $rg({}^tA) = A$

2) Pour $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $rg(A) = n \Rightarrow rg(\tilde{A}) = n$, $rg(A) = n-1$ $\Rightarrow rg(\tilde{A}) = 1$ et $rg(A) = n-2 \Rightarrow rg(\tilde{A}) = 0$

## III _ Applications en théorie des corps et en analyse

Théorie des corps | Ici, $K$, $L$ et $M$ sont des corps commutatifs. On regarde une suite d'extensions $K \subset L \subset M$. Alors $M$ et $L$ sont des Kev et $L$ sous kev de $M$

↳ <u>Application</u> : Tout corps fini est commutatif. | DVPT

**Thm** Si $(e_i)_{1 \le i \le n}$ K-base de $L$ et $(f_j)_{1 \le j \le m}$ L-base de $M$ alors $(e_i f_j)_{i,j}$ K-base de $M$

**Déf** Soit $k \subset K$ une extension de corps, soit $\alpha \in K$. On dit que $\alpha$ est <u>algébrique sur $k$</u> s'il existe $P \in k[X] \setminus \{0\} \,/\, P(\alpha) = 0$

**Prop** $\alpha$ est algébrique sur $k \Leftrightarrow k[\alpha]$ est de dimension finie sur $k$.

**Cor** Si $\dim_k K < +\infty$ alors tout élément est algébrique.

**Déf** Si $\alpha$ est algébrique on note $\deg(\alpha)$ le degré du polynôme minimal de $\alpha$

**Prop** Si $\dim_k K = n$ alors : $\forall \alpha \in K$, $\deg(\alpha) \mid n$

**Cor** Si $\dim_k K$ est premier et si $\alpha \in K \setminus k$, $K = k(\alpha)$

**Cor** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 1 ou 2

En Analyse | **Prop** En dimension finie, $\|\ \|$ sont équivalentes.

**Cor 1** Si $E$ est un evn de dimension finie alors ses boules fermées sont compactes

**Cor 2** Dans le même cadre, les applications linéaires sont continues.

**Prop** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ _ $V$ ouvert de $\mathbb{R}^p$ alors $U$ homéomorphe à $V \Rightarrow n = p$

↳ <u>Application</u> La dimension d'une variété topologique est bien définie.

**Prop** Tout Revn de dimension finie est complet

**Cor** Tout Revn de dimension finie est fermé.

**Prop** L'ensemble des matrices de rang $\le r$ est un fermé de $\mathcal{M}_{n,p}(k)$.

**Thm** (Riesz) Un Revn est de dimension finie (ssi) il est localement compact.

# Théorème des extremums liés.