) Brancher & dim 1 pour les form.)

DÉTERMINANT. EXEMPLES & APPLICATIONS — 124.

I Théorie générale

Soient R un anneau commutatif et E un R-module. Une application
$$f : E^n \longrightarrow R \quad (n \geqslant 1)$$
est une <u>n-forme linéaire</u> si elle est linéaire en chaque variable. Elle est <u>alternée</u> si de plus elle s'annule dès que deux variables sont égales. Par convention, les 1-formes linéaires sont alternées.

<u>Rq</u> : si $E = R^n$ on parle de <u>forme multilinéaire</u>.

Pour toute la suite soit f une n-forme linéaire alternée.

<u>Lemmes</u> : (i) si $i \neq j$ alors
$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) ;$$
(ii) si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors
$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n) ;$$
(iii) si $i \neq j$ et $\lambda \in R$ alors
$$f(\dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$$

<u>Formule fondamentale</u> : si $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ alors
$$f(w_1, \dots, w_n) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\Big) f(v_1, \dots, v_n).$$

<u>Déf</u> : on appelle <u>déterminant</u> toute application
$$\det : \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow R$$
qui, vue sur $(R^n)^n$, est multilinéaire alternée et telle que $\det(I_n) = 1$. Si $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$ (où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de R^n) on note
$$\det(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

D'après la formule fondamentale, si dét existe elle est unique.

<u>Prop</u> : l'application dét existe et satisfait la règle du développement par rapport aux lignes : $\forall i \in [\![1, n]\!]$:
$$\det(M) = (-1)^{i+1} m_{i1} \det(M_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} m_{in} \det(M_{in})$$
où $M_{ij} = (m_{k\ell})_{k \neq i, \ell \neq j}$.

<u>Applications de la formule fondamentale</u> :

- $n = 2$: « produit en croix » $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- $n = 3$: « formule de Sarrus »
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 .$$
- si M est triangulaire $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$.
- si P_σ est une matrice de permutation, alors $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.
- $\det({}^t M) = \det(M)$; $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Si E est un K-espace vectoriel, si $M_{\mathcal{B}}$ est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(M_{\mathcal{B}})$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$; on le note $\det(f)$.

<u>Prop</u> : si R est intègre, si $x_1, \dots, x_n \in R^n$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ liés $\Leftrightarrow \det(x_1, \dots, x_n) = 0$.

définir

II Exemples ; calculs pratiques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$. Les résultats suivants permettent le calcul de $\det(A)$ en $O(n^3)$ opérations élémentaires.

SLn + Frob. Zolo DVR

<u>Prop</u> : (Miller.) si $a_{11} \in R^\times$ alors
$$\det(A) = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \det\big((b_{ij})_{i,j \geqslant 2}\big)$$
où $b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$.

<u>Prop</u> : (décomposition LU) on suppose que tous les mineurs fondamentaux de A (i.e. les $\det((a_{ij})_{i,j \leqslant k})$ pour $k < n$) sont inversibles. Alors il existe L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

* <u>polynôme caractéristique</u> : si $M \in \mathcal{M}_n(R)$ on pose $\chi_M(X) = \det(XI_n - M) \in R[X]$.

Réciproquement si $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in R[X]$ alors c'est le polynôme caractéristique de la matrice compagne $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Th : (Hamilton-Cayley.) $\chi_M(M) = 0$.
Notons $\Sigma_k(M)$ la somme de tous les mineurs principaux (i.e. ceux issus de la diagonale) d'ordre k de M. Alors

$$\chi_M(X) = X^n - \Sigma_1(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \Sigma_n(M)$$

(en fait $\Sigma_n(M) = \det(M)$). Voici une autre méthode pour calculer $\chi_M(X)$; c'est l'algorithme de Faddeev-Leverier. On pose $M_0 = M$ puis si $k < n$ (on suppose que R est de caractéristique 0) :

$$M_{k+1} = M\left(M_k - \frac{1}{k+1}\mathrm{tr}(M_k)I_n\right)$$

Alors $\chi_M(X) = X^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathrm{tr}(M_{k-1})X^{n-k}$.

Application : si on a une forme quadratique de matrice A, on peut se servir de $\chi_A(X)$ pour déterminer sa signature.

* Déterminant de Vandermonde : si $x_1, \dots, x_n \in R$, alors

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Ce déterminant apparaît par exemple lors de l'interpolation de Lagrange.

* Déterminant de Smith : si φ est la fonction d'Euler alors

$$\det\left((i \wedge j)_{i,j \in [\![1,n]\!]}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Application : théorème de Brauer. Les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables si et seulement si σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.

* Déterminant circulant : soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = P(1) \cdot P(\omega) \cdot \dots \cdot P(\omega^{n-1})$$

où $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Application : polygônes emboîtés. Si $z_1^0, \dots, z_n^0 \in \mathbb{C}$ et si $z_i^{k+1} = \frac{1}{2}(z_i^k + z_{i+1}^k)$ (avec $z_{n+1} := z_1$) alors $(z_1^k, \dots, z_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\ell, \dots, \ell)$ où $\ell = \frac{1}{n}(z_1^0 + \dots + z_n^0)$.

III Applications

* Algèbre linéaire.

Déf : soit $M \in \mathcal{M}_n(R)$, on note

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left((m_{kl})_{k \neq i, l \neq j}\right)$$

et $\mathrm{com}(M) = (b_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. C'est la comatrice de M.

Th : $M \cdot {}^t\mathrm{com}M = {}^t\mathrm{com}M \cdot M = \det(M) I_n$. En particulier M inversible $\Leftrightarrow \det(M) \in R^\times$.

Application : formules de Cramer. On considère le système $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $b \in R^n$. Si A est inversible, il y a une unique solution donnée par $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det(A_1 | \dots | A_{i-1} | b | A_{i+1} | \dots | A_n).$$

Déf : (rang d'une matrice) c'est le plus grand entier k tel que M possède un mineur d'ordre k non nul. On le note $\mathrm{rg}(M)$. De la définition découle :

- M inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,M = n$ (sur un corps)
- $\mathrm{com}\,M = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,M \leq n-2$ (sur un corps)

Enfin, sur un corps toujours, on montre que si $\mathrm{rg}\,M = n-1$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{com}\,M) = 1$.

* Géométrie

Notion d'orientation. Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension finie n. On dit que $f \in GL(E)$ préserve l'orientation si $\det(f) > 0$. Fixer une base de E détermine donc une orientation (dite directe) ; les autres bases ayant même orientation si l'endomorphisme de passage la préserve. Les bases qui ne sont pas dans la classe de la base choisie sont dites indirectes.

Notion de volume algébrique. La fonction qui à un parallélotope $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ associe son volume algébrique est multilinéaire alternée, et vaut 1 sur le parallélotope standard : c'est donc le déterminant :

$$|\mathrm{volume}|(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = |\det(\vec{v}_1 | \dots | \vec{v}_n)|.$$

Dans le cas d'un élément de volume infinitésimal, on retrouve la formule du changement de variables.

<u>Formule de Binet-Cauchy</u>. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, si $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ est de cardinal m, on note A_S (resp. B_S) la matrice obtenue à partir de A (resp. B) en ne gardant que les colonnes (resp. lignes) à indices dans S. Alors:

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |S| = m}} \det(A_S)\det(B_S).$$

Si $B = {}^tA$, cette formule exprime le carré du volume du parallélotope engendré par les colonnes de ${}^tA$ en fonction des carrés des volumes des projections orthogonales sur les $\binom{n}{m}$ sous-espaces de dimension m.

<u>Alignement dans $\mathbb{R}^2$</u>. Trois points $(x_i;y_i)$ pour $i \in \{1,2,3\}$ sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

En complexes, z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

<u>Cocyclicité dans $\mathbb{R}^2$</u>. Soient $(x_i;y_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ non alignés. Alors (x,y) appartient au cercle passant par les $(x_i;y_i) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$.

<u>Distance à un sous espace</u>. Soit E un espace préhilbertien réel. Si $v_1,\dots,v_n \in E$ on pose $G(v_1,\dots,v_n) = \det\big((v_i|v_j)_{i,j}\big)$, c'est le déterminant de Gram. Soit F un sous-espace de dimension finie, de base $(e_1,\dots,e_n)$. Alors

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{G(x,e_1,\dots,e_n)}{G(e_1,\dots,e_n)}} \quad (\forall x \in E).$$

<u>*Topologie matricielle</u>

On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la topologie habituelle. Du caractère polynomial de $\det$, on déduit que $GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{Z}(\det)$ est dense.

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. L'application

$$z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$$

est polynomiale, et n'a qu'un nombre fini de zéros; on en déduit qu'il existe dans $GL_n(\mathbb{C})$ un chemin de A à B. Corollaire: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

<u>*Résultant</u>

Soit R un anneau intègre et soient $P,Q \in R[X]$. Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, on pose

$$\text{rés}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & a_0 \\ b_m & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m & \cdots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ lignes} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ lignes} \end{matrix}$$

qu'on appelle <u>résultant</u> de P et Q. C'est le déterminant de la <u>matrice</u> de Sylvester de P et Q.

<u>Th</u>: P,Q ont un diviseur commun non trivial dans $R[X] \Leftrightarrow$ ils ont une racine commune dans une extension $\Leftrightarrow \text{rés}(P,Q) = 0$.

<u>* Analyse</u>

Voici pour finir une application du déterminant de Cauchy. Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j$ ne soit jamais nul. Alors

$$\mathcal{C}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) := \det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{i,j}\right)$$

$$= \prod_{i<j}(a_j - a_i)(b_j - b_i) \cdot \prod_{i,j}(a_i+b_j)^{-1}.$$

<u>Th</u>: (Müntz) soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ une suite de réels; soient $e_n : x \mapsto x^{\alpha_n}$ et $E_n = \text{vect}(e_1,\dots,e_n)$. Enfin soit $E_\infty = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Alors E_∞ est dense dans E si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Ugourdon

Ifrmaolis – Troysse

OBJECTIF AGREG

MNEINMÉ - TESTARD

ROUVIERE

Laux - Picard