n° 105 : METHODES COMBINATOIRES, PROBLEMES DE DENOMBREMENT.

I Principes généraux de combinatoire

1- Produits d'ensembles finis

Prop : Soient $(E_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ n ensembles finis. [De Biasi]

Si les E_i sont deux à deux disjoints alors $\left|\bigcup_{1\le i\le n} E_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |E_i|$

Sinon : $\left|\bigcup_{1\le i\le n} E_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |E_i| - \sum_{1\le i,j\le n} |E_i\cap E_j| + \sum |E_i\cap E_j\cap E_k| + \dots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{1\le i\le n} E_i\right|$

(formule du crible)

Ex : • Combien peut-on écrire de nombres de 3 chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?

E = {nombres à 3 chiffres}, A = {nombres à 3 chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9}

$|A| = |E| - |\bar{A}|$ où $\bar{A}$ = {nombres à 3 chiffres écrits avec 1, 2, 4, 5, 7 ou 8}

$\left.\begin{array}{l}|\bar{A}| = 6^3 \\ |E| = 900\end{array}\right\} \Rightarrow |A| = 684$ [De Biasi]

• Un ensemble de n objets et un ensemble de n cases : De combien de façons peut-on placer les n objets dans les n cases, de telle sorte que jamais un objet ne se trouve dans la case de même indice ? (Problème des rencontres) [NOU]

Principe du produit : $|A_1\times\dots\times A_p| = \prod_{k=1}^{p} |A_k|$ [De Biasi]

cas particulier : $|A^p| = |A|^p$

Ex : Alphabet braille ⠿ $2^6 = 64$ signes différents

App Dénombrement des applications : le cardinal de l'ensemble des applic. d'un n-ensemble X dans un p-ensemble Y est p^n.

Lemme des Bergers : Soient A et B deux ensembles finis, φ une application de A dans B. Si pour tout $x\in B$, $|\varphi^{-1}(x)| = n$, alors $|A| = n\,|B|$.

2. Arrangements et permutations [De Biasi]

Déf : Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, $1\le p\le n$ et E un n-ensemble. Un arrangement de E p à p est un p-uplet $(e_1,\dots,e_p)$ formé de p éléments de E 2 à 2 distincts.

Rq : Comme un tel arrangement est défini par une application injective de $I_p = [\![1,p]\!]$ dans E, on peut aussi identifier "Arrangement p à p de E" et "injection de I_p dans E".

Th : Le nombre d'arrangements d'un n-ensemble p à p est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Ex : tirer p boules (sans remise) dans une urne qui en contient n et les placer ensuite (une par case) à la case n°1, puis n°2, …, puis n°p.

Déf : Pour $n\ge 1$, on appelle permutation d'un n-ensemble tout arrangement de E n à n. Le nombre de permutations d'un n-ensemble E (et donc de injections de E dans E) est $n!$

[FF1] p30

Ex : Les anagrammes du mot TRAINE sont les permutations d'un ensemble de 6 éléments. Le nombre d'anagrammes est donc égal à : $6! = 720$

3) Dénombrement des combinaisons [De Biasi]

Déf : Toute partie à p éléments d'un ensemble à n éléments $(0\le p\le n)$ est appelée combinaison (sans répétition) de ces n éléments p à p.

• On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de n éléments p à p.

Th : $A_n^p = C_n^p \cdot p!$ d'où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ utilise le lemme des Bergers

Th : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$; $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ $(a, b\in\mathbb{C})$

Ex : • nombre de tirages de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes : $\binom{52}{5}$ [FF1] p32

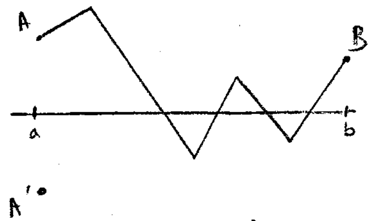
• calcul de sommes : $\sum_{1}^{n} y = C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$

De manière analogue, pour former un triplet $\{x, y, z\}$ avec $x<y<z$ de $[\![0,n]\!]$ pour y choisi dans $[\![1, n+1]\!]$, il y a y choix possibles pour x et $n-y$ pour z, d'où en posant $a = y$, $b = n-y$ $\sum_{a+b=n} ab = C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$

App du crible : nb de surjection σ_p^n de I_n sur I_p : $\sigma_p^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k (p-k)^n$.

4- Autres principes généraux

Principe de réflexion [FF1] p 36



Soient A et B deux points du plan $A=(a,\alpha)$, $B=(b,\beta)$. On suppose $0\leq a<b$, $\beta\geq 1$

Lemme : le nombre de chemins allant de A à B qui touchent ou traversent l'axe horizontal est égal au nombre de chemins allant du point $A'=(a,-\alpha)$ à B.

Lemme : Soient $n\geq 1$ et $s\geq 1$. Le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,s) et restant toujours strictement au-dessus de l'axe horizontal est $\frac{s}{n} C_{n,s} = \frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p}$ où $p=\frac{n+s}{2}$ $q=\frac{n-s}{2}$

App : Problème du scrutin : Dans un scrutin, il y a p bulletins pour le candidat P et q pour le candidat Q. On suppose $p>q$. Alors la probabilité pour que, durant le dépouillement, P soit toujours en tête est égale à $\frac{p-q}{p+q}$.

Principe des tiroirs [NOU]

Si on met n paires de chaussettes dans une commode contenant m tiroirs et si $m>n$, alors il y a un tiroir contenant deux paires de chaussettes au moins.

App Soit $\alpha>0$ un nombre irrationnel. [GOU1] p 275
$\forall N\in\mathbb{N}^*, \exists (p,q)\in\mathbb{N}^2, 1\leq q\in N, \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}$.

II Séries génératrices

Déf : Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels. On appelle série génératrice de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ (resp série génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$) la série formelle [NOU]
$$\Phi(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n \quad \left(\text{resp } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} t^n\right)$$

Nombre de façons de parenthéser une suite de n termes

On considère un produit P de n nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans cet ordre : $P=a_1\dots a_n$. On note C_n le nombre de parenthésages différents de P

Pour $n\geq 2$, tout produit des a_i s'écrit d'une manière et d'une seule $(a_1\dots a_k)(a_{k+1}\dots a_n)$ avec $1\leq k\leq n-1$. Puisqu'il y a resp C_k parenthésages possibles pour le 1^e facteur $(a_1\dots a_k)$ et C_{n-k} pour le 2^nd facteur $(a_{k+1}\dots a_n)$, il y a $C_k C_{n-k}$ parenthésages possibles. On obtient donc $C_n=\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$. (les C_n sont les nombres de Catalan) [Xens alg 1] p 12

On considère $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n$ la série génératrice des C_n.

Comme $f(x)^2=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}\right)x^n$, on a $f(x)^2-f(x)+x=0$

d'où $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. Par dérivation de f et en utilisant le développement de $(1-u)^\alpha$ on obtient : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{n+1}x^{n+1}$ et $C_n=\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$.

Nombre de façons de faire la monnaie d'une certaine somme avec des valeurs de pièces données.

Soient $a_1 \dots a_k \in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble, u_n, $n\geq 1$ le nombre de k-uplets $(x_1 \dots x_k)\in\mathbb{N}^k$ tels que $a_1x_1+\dots+a_kx_k=n$.
La fonction génératrice de la suite (u_n) est $f(z)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-z^{a_i}}$

On obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{a_1\dots a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$ [Xens ana 2] p 197

Si on cherche de combien de manières il est possible de faire n euros avec des pièces ou des billets de 1, 2 ou 5 euros, il suffit de déterminer le coefficient ~~de~~ x^n dans le DSE de $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$

Déf : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle partition de n la donnée d'un entier $m\in\mathbb{N}^*$ et d'une solution entière de l'équation $y_1+\dots+y_m=n$, $y_1\geq y_2\geq\dots\geq y_m$ [NOU]

Nombre de manière d'écrire un entier comme somme d'entiers non nuls. On note $p(n)$ le nombre de partitions de n. Soit $f_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-t^k}$

alors $f_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}t^{k\ell}\right)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\sum_{y_1+2y_2+\dots+ny_n=\ell}1\right)}_{=p(\ell)}t^\ell$ dès que $n\geq\ell\geq 1$ [Xens ana 2] p 199

App le nombre de classes de similitude d'endomorphismes nilpotents de $M_n(\mathbb{K})$ est $p(n)$ [AF1] p 665

Nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ avec $B_0=1$. On pose $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$ la série génératrice exponentielle

de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Elle vérifie l'équation différentielle $f'(z) = f(z)e^z$ pour $z \in]-R,R[$ où R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$. On en déduit $f(z) = e^{e^z - 1}$ et ensuite
$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$. [Xensalg1] $\boxed{DVP}$

III Fonctions multiplicatives

Déf : $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite <u>multiplicative</u> si $m \wedge n = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$

Déf : On appelle <u>fonction d'Euler</u>, notée $\varphi(n)$, le nombre d'entiers x tels que $1 \leq x \leq n$ et $x \wedge n = 1$. [PER], 24

Prop . φ est multiplicative
- si p est premier, $\varphi(p) = p-1$ et $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$
- $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$
- $\forall n \geq 2$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [GOUR], 32

Déf : La <u>fonction de Möbius</u> est définie par : $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1,0,1\}$

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k & \text{si } k \geq 0,\ p_i \text{ premiers distincts} \\ \mu(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
[FRAalg1], 93

Prop . μ est multiplicative
. $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ [FRAalg1], 93

<u>Formule d'inversion de Möbius</u> : Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $m \mapsto \sum_{d|n} f(d)$
Pour tout $n \geq 1$, $f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$.

App <u>Dénombrement des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$</u> :
$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $I(n,q)$ le cardinal de l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_q[X]$ de degré n, irréductibles, unitaires.
Alors $\forall n \geq 1$, $I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$. [FRAalg1], 189

IV Théorie des groupes [B-R]

<u>Équation aux classes</u> : Si G est un groupe fini opérant sur X, alors $\forall x \in X$, $|G| = |O_x| |Stab_x|$.
Si l'action définit r orbites distinctes $O_1, \ldots, O_r$: $|X| = \sum_{i=1}^{r} |O_i| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|Stab_{x_i}|}$

<u>Utilisation du principe du double compte</u>

→ <u>Formule de Burnside</u> : Soit G un groupe agissant sur un ensemble E et $O_1, \ldots, O_k$ les orbites pour cette action. On note $Fix(g) = \{x \in E,\ g \cdot x = x\}$. Alors $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$

→ <u>Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$</u> :
Soit G un groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$, d'ordre $n \geq 1$. Soit P l'ensemble des pôles des rotations différentes de l'identité de G. Alors :
1) le groupe G opère dans P
2) le stabilisateur de tout x de P est cyclique, $|G_x| = e_x$ vérifie $2 \leq e_x \leq n$.
3) $n \sum_{j=1}^{k} (1 - e_j^{-1}) = 2(n-1)$ $\boxed{DVP}$
4) a) $k = 2$, $e_1 = e_2 = n$
b) $k = 3$, $e_1 = 2$, $e_2 = 2$ et $e_3 = n$
$k = 3$, $e_1 = 2$, $e_2 = e_3 = 3$ et $n = 12$
$k = 3$, $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 = 4$ et $n = 24$
$k = 3$, $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 = 5$ et $n = 60$.

<u>Th d'isomorphisme</u> Soit $f : G \to G$ un morphisme de groupes, alors $|G| = |\mathrm{Im} f| \times |\mathrm{Ker} f|$

$|GL_n(K)| = (q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$ $(|K| = q)$ [XensAlg1], 17

App $|SL_n(K)| = \frac{(q^n-1) \cdots (q^n - q^{n-1})}{q-1}$

$|PGL(n, \mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| = N$ [PER], 105
$|PSL(n, \mathbb{F}_q)| = \frac{N}{d}$ où $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$

App Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q^*$: $\frac{q-1}{2}$. [PER], 74

Références

[De Biasi], Math pour le CAPES et l'agreg interne
[PER] Perrin
[GOU2] Gourdon algèbre
[NOU] Noudin
[FF1] Foata Fuchs, Calcul des probabilités
[GOU1] Gourdon analyse
[Xens alg 1 / ana 2] Graux Xens algèbre 1 / analyse 2
[AF1] Arnaudiès Fraysse, algèbre 1
[B-R] Bouvier Richard, Groupes