136. **Coniques. Exemples et applications.**

I. Classification affine

<u>Cadre</u> : $\mathcal{E}$ plan affine réel, E plan vectoriel associé

I.1. Déf. et 1ères propriétés

Déf. : On appelle conique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sous la relation "$f \sim g$ ssi $\exists \lambda\ f = \lambda g$"
L'ensemble des points vérifiant $f(M) = 0$ est l'image de la conique

Rq. (i) On peut expliciter f sous la forme : $f(M) = q(\vec{OM}) + L_O(\vec{OM}) + c_O\ \forall O, M$
où q forme quadratique non nulle, L_O forme lin., c_O cste

(ii) x^2+y^2+1 et x^2+1 sont d'image vide mais ne définissent pas la m. conique

Afin de classifier les coniques on introduit :

Déf. : la forme quadratique homogénéisée de q est $Q(u,z) = q(u) + L(u)z + cz^2$ $u \in E$, $z \in \mathbb{R}$.
la conique est dite propre si la forme Q est non dégénérée.

Rq. (i) Si $f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2fy + g$
alors son homogénéisée $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dxz + 2fyz + gz^2$

(ii) $f(x,y) \Leftrightarrow [x\ y\ 1] \begin{bmatrix} a & c & d \\ c & b & f \\ d & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

et $Q(x,y,z) \Leftrightarrow [x\ y\ z] \begin{bmatrix} a & c & d \\ c & b & f \\ d & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Exo. Soient cinq points dans le plan affine tels qu'il n'y en ait pas quatre alignés parmi eux. Alors il existe une unique conique passant par ces 5 points

Déf. : On dit qu'un point Ω tel que $L_\Omega = 0$ est un centre pour la conique. Quand le centre est unique on parle de conique à centre.

Rq. : géométriquement Ω est centre de symétrie de la conique.

Prop. : Une conique affine est à centre ssi la partie quadratique q d'un des polynômes qui la définit est non dégénéré.

ex. : $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 + 2y + 1$ a pour centre $(-3,-2)$
(Ω centre de symétrie $\Rightarrow$ dans un repère centré en Ω il n'y a pas de terme linéaire

I.2. Classification.

Classifier une conique c'est déterminer la classe à laquelle elle appartient, classe qu'on définit comme suit :

Déf. : La classe d'une conique est l'orbite à laquelle elle appartient sous l'action
$$GA(\mathcal{E}) \times \{\text{coniques}\} \to \{\text{coniques}\}$$
$$(G\ ,\ f(x,y)) \mapsto \lambda f(G(x,y))$$

Prop. : Cette action a neuf orbites et chacune d'entre elle est entièrement caractérisée par la connaissance du couple (signature de Q, signature de q)

	équation (dite réduite)	signature de Q	signature de q
ellipse	$x^2+y^2-1=0$	$(2,1)$	$(2,0)$
ellipse imaginaire	$x^2+y^2+1=0$	$(3,0)$	$(2,0)$
droites im. conj. séc.	$x^2+y^2=0$	$(2,0)$	$(2,0)$
hyperboles	$x^2-y^2-1=0$	$(2,1)$	$(1,1)$
droites sécantes	$x^2-y^2=0$	$(1,1)$	$(1,1)$
paraboles	$y^2-x=0$	$(2,1)$	$(1,0)$
droites //	$y^2-1=0$	$(1,1)$	$(1,0)$
droites im. conj. //	$y^2+1=0$	$(2,0)$	$(1,0)$
double droite	$y^2=0$	$(1,0)$	$(1,0)$

ex. : $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 + 2y + 1$
signature de q : $(2,0)$
signature de Q : $(2,1)$
$\Rightarrow$ c'est une ellipse.

II. Classification euclidienne.

Cadre : $\mathcal{E}$ plan affine euclidien, E plan vectoriel associé

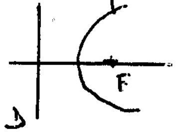
II.1. Définitions et propriétés

Déf / Prop [description par foyer et directrice] :

· Pour toute conique propre d'image non vide, il existe un point F appelé foyer, une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas F, appelée directrice et $e \in \mathbb{R}_+^*$ appelé excentricité tels que la conique soit l'ensemble des points M t.q. $FM = e\,d(M,\mathcal{D})$ sauf le cercle.

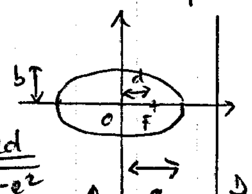
· Réciproquement, étant donnés $F, \mathcal{D}$ et e, l'ensemble des points M tels que $FM = e\,d(M,\mathcal{D})$ est une conique propre.

$\hookrightarrow$ une ellipse si $e<1$, parabole si $e=1$, hyperbole si $e>1$.

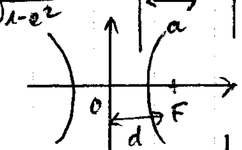
ex. :  parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité $e=1$

Prop. : Une conique propre d'image non vide s'écrit dans un repère orthonormé :

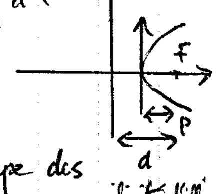
(i) soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellipse, origine au centre) $a=\frac{ed}{1-e^2}$, $b=\frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}$



(ii) soit $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (hyperbole, origine au centre) $a=\frac{ed}{e^2-1}$, $b=\frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$



(iii) soit $y^2=2px$ (parabole, origine au sommet de la parabole)



Rq. : (i) la classification euclidienne répertorie les orbites du groupe des isométries sur l'ensemble des coniques. Il y a une infinité d'orbites (infinité d'ellipses, infinité d'hyperboles, infinité de paraboles)

(ii) l'excentricité e est un invariant de types (ellipse, hyperbole ou parabole).

Thm [de Dandelin ou belge sur les sections coniques] : $\boxed{\text{DEV}}$

Soit E espace euclidien de dimension 3

Soit Γ_1 un cercle dans un plan Π_1. Soit S un point situé sur l'axe du cercle ($\neq$ du centre du cercle)

Alors l'image Γ de Γ_1 par projection conique de point de vue S sur un plan Π ne passant pas par S est une conique :

· une ellipse si le plan Π_0, parallèle à Π passant par S, ne coupe pas Γ_1

· une hyperbole si Π_0 coupe Γ_1 en deux points distincts

· une parabole si Π_0 est tangent à Γ_1.

application : . dessin en perspective, les cercles se transforment en ellipse

. les perspectives préservent les birapports et l'alignement. (en part. l'harmonicité)

II.2. Etude particulière des coniques à centre

Déf / Prop. bifocale :

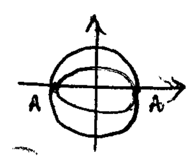
(i) Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$, pour un certain réel positif a t.q. $2a > FF'$.

(ii) une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ pour un certain réel positif a t.q. $2a < FF'$.

application : construction du "jardinier"

Déf. : Considérons l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$

On appelle cercle principal le cercle de diamètre A, A'.



Prop. : L'ellipse s'obtient à partir du cercle principal par une affinité de rapport b/a.

application : l'aire de l'ellipse est πab.

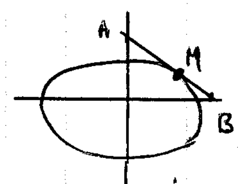
Thm d'Appollonius :

· le lieu des milieux des cordes de l'ellipse qui sont parallèles à une direction (δ) est une droite passant par son centre (diam. conjugués déf.)

· le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse a une aire constante égale au produit des deux demi-axes

Voici une méthode de construction de l'ellipse :

Méthode de la bande de papier :



soit une droite mobile dont 2 pts déterminés A et B décrivent 2 droites rectangulaires. Le lieu géométrique d'un point M de cette droite, lié invariablement au segment [AB], est une ellipse.

III. Applications.

III. 1. Coniques en astronomie

Prop. : la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e a pour équation polaire dans le repère $(F,\vec{i},\vec{j})$: $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$

Rq. : l'origine est au foyer et non au centre.

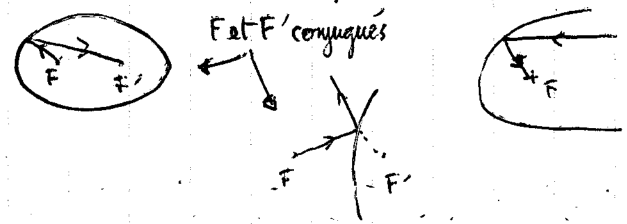
Application : $\boxed{\text{DEV}}$ trajectoires des satellites autour d'un astre fixe : leurs déterminations + 3ème loi de Kepler dans le cadre elliptique.

III. 2. Propriétés tangentielles et applications.

Prop. : (i) Etant donnée une conique à centre de foyer F, F', la tangente en un point M de la conique est bissectrice de l'angle $(\vec{MF}, \vec{MF'})$ (bissectrice ext. pour l'ellipse) (bissectrice int. pour l'hyperbole)

(ii) Etant donnée une parabole de foyer F et d'axe Fx, la tangente en un point M de la parabole est bissectrice extérieure de l'angle $(\vec{MF}, \vec{Mx})$

Application : (i) "propriété optique des coniques".



F conjugué à l'∞

↳ · antenne parabolique

· projecteur

III. 3. Ellipse de Steiner.

Déf. : L'ellipse de Steiner d'un triangle est l'unique ellipse tangente à chacun des côtés en leur milieu.

Prop. : (i) parmi toutes les ellipses inscrites dans le triangle, elle a une aire max.

(ii) Si z_1, z_2 et z_3 sont les affixes complexes des sommets du triangle et si $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ alors les foyers de l'ellipse sont les deux racines du polynôme P'.

Références : · "Géométrie" Michèle AUDIN

· Wikipédia "Coniques"

· "Initiation à la géométrie" Lehman / Bkouche

· "Géométrie et compléments" DELTHEIL / CAIRE

· "Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne" DE GIACI