Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 2 exercices ainsi que 2 problèmes tous indépendants. On rappelle que pour la majorité de la classe, les questions de cours, les deux exercices et le problème 1 sont à traiter. Pour les élèves à qui il a été précisé de faire le DS dans une version plus difficile : les questions de cours, le problème 1 et le problème 2 sont à traiter.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Questions de cours

1. Donner, sans démonstration, le développement limité à l'ordre 3 de la fonction exp en 0.
2. Énoncer, sans démonstration, le théorème donnant l'égalité des accroissements finis (avec ses hypothèses précises).

Exercice 1 : Développements limités et étude locale (adapté exercice oral CCP PC)

On considère la fonction f donnée par
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ qu'on notera à nouveau f (on précisera la valeur de $f(0)$).
4. Montrer que f est dérivable en 0 et donner une équation de sa tangente en 0. Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0 ?

On considère maintenant la fonction g donnée par
$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

5. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 en 0 et montrer que g admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ et que ce prolongement, à nouveau noté g, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(0)$?
6. Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 2 : Une équation fonctionnelle (adapté de concours ENAC)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f, définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout réel x :
$$f(ax+b) = f(x). \tag{E}$$

1. Montrer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathscr{E}$.

On considère réciproquement une fonction $f \in \mathscr{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$
et on pose $r = \dfrac{b}{1-a}$.

2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$ (remplacer x par u_n dans (E)).
3. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$. Montrer, en utilisant la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = a\,v_n.$$

4. En déduire une expression simple de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a^n\,(u_0 - r) + r.$$

5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente exprimer sa limite en fonction de a et b.
6. Justifier que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\frac{b}{1-a})$.
7. Conclure que f est constante.

Dans la suite, on conserve les hypothèses pour l'ensemble $\mathscr{E}$ mais on suppose que $|a| \geq 1$.

8. Si $a = 1$ et que $b \neq 0$, quel nom donne-t-on aux fonctions satisfaisant l'équation (E) ?
9. Si $|a| \neq 1$ et que $f \in \mathscr{E}$ montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = f(x)$ puis conclure avec la partie précédente que f est constante.
10. Que dire de l'ensemble $\mathscr{E}$ si $a = -1$?

Problème 1 : Fonctions convexes

Ce problème étudie des fonctions particulières dont la courbe représentative délimite un domaine convexe.

Exemple de la fonction exponentielle :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On veut montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$e^{t\,a+(1-t)\,b} \leq t\,e^a + (1-t)\,e^b.$$

on pose pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = t\,e^a + (1-t)\,e^b - e^{t\,a+(1-t)\,b}$.

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x > 1 + x$ (on fera une étude rapide de la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x$).
2. Justifier g est dérivable deux fois sur $[0,1]$ et que pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t) = e^a - e^b - (a-b)\,e^{t\,a+(1-t)\,b}$ et $g''(t) = -(a-b)^2\,e^{t\,a+(1-t)\,b}$.
3. En déduire que g' est strictement décroissante sur $[0,1]$.
4. Montrer, avec la question 1 que

$$g'(0) = e^b\big(e^{a-b} - 1 - (a-b)\big) > 0.$$

5. Montrer de même que $g'(1) < 0$.
6. Justifier, en citant le théorème utilisé, qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
7. Construire un tableau sur $[0,1]$ faisant apparaître α, le signe de g'', les variations de g', le signe de g' et les variations de g.
8. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
9. Montrer que g est positive sur $[0,1]$ et conclure.

Fonctions convexes et inégalité des trois pentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I. On dit que f est une **fonction convexe** sur I si pour tous $a, b \in I$ et tout $t \in [0,1]$,

$$f\big((1-t)\,a + t\,b\big) \leq (1-t)\,f(a) + t\,f(b).$$

Dans les questions 10 à 13 on considère une fonction convexe f et $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$.

10. Montrer que $t = \dfrac{y-x}{z-x} \in [0,1]$ et que $y = (1-t)\,x + t\,z$.
11. Montrer, avec la définition d'une fonction convexe, que $f(y) \leq (1-t)\,f(x) + t\,f(z)$.
12. En déduire, avec la valeur de t, que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

13. Montrer de même que
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Dans les questions 14 à 16 on suppose que pour tous $x,y,z \in I$ avec $x<y<z$, on a :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
et on montre que f est convexe.

14. Soient $a,b \in I$ avec $a<b$ et $t \in]0,1[$. On pose $y=(1-t)\,a+t\,b$. Montrer que $a<y<b$.
15. En prenant $x=a$ et $z=b$, montrer que $f(y)-f(a) \leq t\left(f(b)-f(a)\right)$.
16. En déduire que f est convexe (on n'oubliera pas les cas $t=0$ ou 1).

On a donc obtenu le fait que f est convexe si et seulement si pour tous $x,y,z \in I$ avec $x<y<z$, on a :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

17. Représenter sur un graphique une fonction convexe (par exemple la fonction exponentielle) et faire figurer des segments dont les pentes sont les trois quantités de l'inégalité précédente. Expliquer le nom d'« inégalité des trois pentes ».

Équivalence avec la croissance de f :
Dans cette partie on montre que f est convexe si et seulement si f' est croissante.
Dans les question 18 à 21, on suppose que f est convexe et on montre que f' est croissante. On considère $x_0, y_0 \in I$ avec $x_0 < y_0$.

18. Quelle est la limite de $\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ lorsque x tend vers x_0 ?
19. Montrer que si x,y vérifient $x_0<x<y<y_0$ alors
$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq \frac{f(y_0)-f(y)}{y_0-y}.$$
20. En déduire que $f'(x_0) \leq f'(y_0)$.
21. Conclure que f' est croissante.

Dans cette question on suppose que f' est croissante et on montre que f est convexe.

22. Soient $x,y,z \in I$ avec $x<y<z$. Justifier, en citant précisément le théorème utilisé et ses hypothèses, qu'il existe $c \in]x,y[$ tel que
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c).$$
23. En utilisant l'équivalente de la partie précédente avec l'inégalité des trois pentes, montrer que f est convexe.

On a donc obtenu l'équivalence : f est convexe si et seulement si f' est croissante.

24. En déduire une nouvelle démonstration du fait que exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
25. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.

Problème 2 : Formule de Taylor avec reste intégral et fonction de Fresnel (adaptation de Mines PSI)

Ce problème justifie d'abord le théorème de primitivation d'un développement limité pour l'ordre 2 puis on applique ceci à une fonction utilisée pour étudier la diffraction de la lumière.

Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 :
Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

1. Justifier que $g(b)-g(a)=\displaystyle\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer, en utilisant une intégration par parties et la question précédente que :
$$\int_a^b (b-t)\,g''(t)\,\mathrm{d}t = -(b-a)\,g'(a)+\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = -(b-a)\,g'(a)-g(a)+g(b).$$
3. Montrer en procédant comme dans la question précédente que :
$$g(b)=g(a)+(b-a)\,g'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}g''(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}g'''(t)\,\mathrm{d}t.$$
4. Justifier que g''' est bornée sur $[a,b]$. On notera $M=\sup\limits_{t\in[a,b]}|g'''(t)|$.
5. On rappelle que l'intégrale d'une fonction positive est positive. Montrer que :
$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}g'''(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}|g'''(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{M}{6}(b-a)^3.$$
6. En déduire que
$$\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}g'''(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right).$$
7. Conclure que $g(x)=g(a)+(x-a)\,g'(a)+\dfrac{(x-a)^2}{2}g''(a)+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$.
8. Montrer que si F est une primitive d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ alors
$$F(x)=F(a)+(x-a)\,f(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f'(a)+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Étude locale de la fonction de Fresnel :
Dans cette partie, on note f, la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\cos(\sqrt{x})$. On notera F l'unique primitive de f qui s'annule en 0 : pour tout $x\in[0,+\infty[$,
$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Justifier f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Sur quel intervalle f est-elle continue ?
10. Rappeler un équivalent de $\cos(y)-1$ lorsque y est au voisinage de 0 et en déduire que
$$f(x)=1-\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x).$$
11. En déduire que f est dérivable en 0 et donner une équation de sa tangente en 0. Que vaut $f'(0)$?
12. En effectuant un développement limité de f à l'ordre 2 en 0, étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente ou voisinage de 0.
13. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.
14. En déduire que
$$F(x)=x-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
et donner un équivalent de $x\mapsto F(x)-x$ en 0.

Dérivées successives et régularité de la fonction de Fresnel :

15. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux polynômes P_n et Q_n, tels que pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}} P_n(x) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}} Q_n(x).$$
16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{n-1} f^{(n)}(x)$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ (on ne cherchera pas à le calculer).
17. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{a_n}{x^n} + \cdots + \frac{a_1}{x} + a_0 + \underset{x \to 0}{o}(1).$$
18. Conclure qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$f^{(n)}(x) = -\frac{a_n}{(n-1)\,x^{n-1}} - \cdots - \frac{a_2}{x} + a_1 \ln x + \ell + \underset{x \to 0}{o}(1).$$
19. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. Qu'en est-il de F ?
20. Montrer que les polynômes P_n et Q_n sont à coefficients entiers.
21. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n et Q_n.