

Proposition de corrigé du DS7

Exercice DS7.1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $Z = z^2$. On alors l'équivalence

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff Z^2 + Z + 1 = 0.$$

Cette dernière équation est une équation du second degré d'inconnue Z et de discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$, qui admet donc deux solutions complexes conjuguées distinctes

$$Z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\pi/3} \text{ et } Z_2 = \overline{Z_1} = e^{2i\pi/3}.$$

Ainsi, z est racine de $X^4 + X^2 + 1$ dans les cas suivants :

$$z^2 = Z_1 \iff z^2 = e^{-2i\pi/3} \iff z = \pm e^{-i\pi/3}$$

$$\text{ou } z^2 = Z_2 = e^{2i\pi/3} \iff z = \pm e^{i\pi/3}$$

Les racines de $X^4 + X^2 + 1$ sont donc $\pm e^{\pm i\pi/3}$. Ces quatre racines sont distinctes et $X^4 + X^2 + 1$ est de degré 4, donc il est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples, et puisque son coefficient dominant est 1, sa forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ est la suivante :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X + e^{-i\pi/3}).$$

Afin d'obtenir sa forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$, il reste à développer les produits correspondant aux racines conjuguées dans l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X^2 - e^{i\pi/3}X - e^{-i\pi/3}X + 1)(X^2 + e^{i\pi/3}X + e^{-i\pi/3}X + 1) \\ &= (X^2 - 2\cos(\pi/3)X + 1)(X^2 + 2\cos(\pi/3)X + 1) \end{aligned}$$

d'après les formules d'Euler. En fin de compte, puisque $\cos(\pi/3) = 1/2$,

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

2. On observe que $\ln(1+x) \sim x$ et $\sin x \sim x$ au voisinage de 0 : la simplification des développements limités dans la fraction va donc entraîner un phénomène de chute de l'ordre de grandeur. Ainsi, il faut effectuer un développement limité d'ordre 3 des deux fonctions pour obtenir le développement limité d'ordre 2 cherché. On a au voisinage de 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} &= \frac{x - (x^2/2) + (x^3/3) + o(x^3)}{x - (x^3/6) + o(x^3)} \\ &= \frac{1 - (x/2) + (x^2/3) + o(x^2)}{1 - x^2/6 + o(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 - u(x)} \end{aligned}$$

où $u(x) = (x^2/6) + o(x^2)$. Puisque $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et puisque $u(x) = O(x^2)$ au voisinage de 0, on a en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $1/(1-u)$:

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + o(u(x)) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

En reportant, puis en développant et en ne gardant que les termes d'ordre au plus 2

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

soit $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$

3. Montrons que Φ est linéaire. Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P(2) + \mu Q(2)) \\ &= \lambda(P(0), P(1), P(2)) + \mu(Q(0), Q(1), Q(2)) \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q)\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.

Montrons que Φ est bijective. Montrons d'abord que Φ est injective. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $P = 0$. On a

$$\Phi(P) = (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0) \quad \text{donc} \quad P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = 0.$$

Ainsi P admet au moins trois racines distinctes qui sont 0, 1 et 2, et puisqu'il est de degré au plus 2, on en déduit que $P = 0$. Ceci montre que $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ donc que Φ est injective.

L'application Φ est donc linéaire et injective entre les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$, qui sont de même dimension finie égale à 3. D'après la caractérisation des applications linéaires bijectives entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, on en déduit qu'elle est bijective. Ainsi, Φ est une application linéaire bijective :

l'application Φ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice DS7.2

Partie I : Une étude de fonction

- La fonction $\sin$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est, par quotient, de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- On a, au voisinage de 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc, par opération sur les développements limités,

$$\frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1).$$

Par suite, f tend vers $1/6$ en 0 donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1/6$.

- Soit $x \in]0, \pi/2]$. La fonction $\sin$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin(x) - \sin(0) = (x - 0) \sin'(c)$$

ce qui donne $|\sin(x)| = |x| \times |\cos(c)| < |x|$. La fonction $g : x \mapsto x - \sin x$ est donc strictement positive sur $]0, \pi/2]$ et nulle en 0. Ainsi, f est strictement positive sur $]0, \pi/2]$ et, avec la question précédente, également en 0. En conclusion, f est strictement positive sur $[0, \pi/2]$.

Partie II : Une suite récurrente

- Par stricte croissance de $\sin$ sur $]0, \pi/2]$, on a, pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $0 < \sin(x) \leq 1 \leq \pi/2$. Ainsi, $]0, \pi/2]$ est un intervalle stable par $\sin$ donc, comme $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

- Avec la question 3, la fonction $x \mapsto \sin x - x$ est strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Cette suite étant positive, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ . De plus, on a :

$\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Supposons que $\ell \neq 0$. On a $\ell \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et, par continuité de $\sin$, $\sin(\ell) = \ell$. Or, par la question 3, on sait que $\sin(\ell) < \ell$: contradiction. En conclusion $\ell = 0$.

Partie III : Détermination d'un équivalent de la suite

7. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on a : $\sin(u_n) \sim u_n$ ce qui s'écrit

$$\boxed{u_{n+1} \sim u_n}.$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, avec l'équivalent précédent et par somme de limites :

$$\frac{u_{n+1} + u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + 1 = 2$$

ce qui s'écrit $u_{n+1} + u_n \sim 2u_n$.

8. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n, u_{n+1} \neq 0$ et :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_{n+1}^2 u_n^2} = \frac{(u_{n+1} + u_n)(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1}^2 u_n^2} = \frac{(u_{n+1} + u_n)(u_n - \sin(u_n))}{u_{n+1}^2 u_n^2}$$

donc par somme et produits d'équivalents, avec la question précédente :

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{2u_n \times (u_n - \sin(u_n))}{u_n^4} = 2 \frac{u_n - \sin(u_n)}{u_n^3}}.$$

9. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \implies |v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |w_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |v_k - \ell| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |v_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} |v_k - \ell| \leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=N}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2}}_{=(n-N) \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

où on a posé $C = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k - \ell|$. Comme $C/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe un rang $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geq N' \implies C/n \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $N'' = \max(N, N')$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N'' \implies |w_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par définition, ceci signifie que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite ℓ .

10. Avec la question 8, ainsi que la limite de la question 1, on a, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, en appliquant la question 9 avec $v_n = 1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}}.$$

11. En considérant n au voisinage de $+\infty$, on a, par somme télescopique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{nu_{n+1}^2} - \frac{1}{nu_0^2} = \frac{1}{nu_n^2} + o(1)$$

donc $\frac{1}{nu_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$. Par opérations sur les équivalents et positivité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Exercice DS7.3

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On pose $(x', y', z') = \varphi((x, y, z))$, autrement dit

$$x' = x - y - z, \quad y' = -x + y - z, \quad z' = -x - y + z.$$

On a alors, par définition de φ

$$\varphi \circ \varphi((x, y, z)) = \varphi((x', y', z')) = (x' - y' - z', -x' + y' - z', -x' - y' + z')$$

avec

$$\begin{aligned} x' - y' - z' &= (x - y - z) - (-x + y - z) - (-x - y + z) \\ &= x - y - z + x - y + z + x + y - z \\ &= 3x - y - z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x' + y' - z' &= -(x - y - z) + (-x + y - z) - (-x - y + z) \\ &= -x + y + z - x + y - z + x + y - z \\ &= -x + 3y - z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } -x' - y' + z' &= -(x - y - z) - (-x - y + z) + (-x - y + z) \\ &= -x + y + z + x - y + z - x - y + z \\ &= -x - y + 3z \end{aligned}$$

d'où en reportant : $\boxed{\varphi \circ \varphi((x, y, z)) = (3x - y - z, -x + 3y - z, -x - y + 3z)}$.

En particulier, on observe que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi((x, y, z)) &= (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z) + (2x, 2y, 2z) \\ &= \varphi(x, y, z) + 2 \cdot (x, y, z) \end{aligned}$$

et ceci étant valable pour tout $(x, y, z) \in E$, $\boxed{\varphi \circ \varphi = \varphi + 2 \text{Id}_E}$.

2. On procède par récurrence sur k .

- Initialisation. On a $\varphi^0 = \text{Id}_E = 0\varphi + 1 \text{Id}_E$ donc le résultat est vrai au rang 0 avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
- Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $(u_k, v_k) \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi^k = u_k\varphi + v_k \text{Id}_E$. En composant cette égalité par φ il vient

$$\varphi^{k+1} = u_k\varphi^2 + v_k \text{Id}_E = u_k(\varphi + 2 \text{Id}_E) + v_k \text{Id}_E = (u_k + v_k)\varphi + 2u_k \text{Id}_E.$$

On pose $u_{k+1} = u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 2u_k$, et on a alors $\varphi^{k+1} = u_{k+1}\varphi + v_{k+1} \text{Id}_E$ ce qui achève la récurrence.

En conclusion :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi^k = u_k\varphi + v_k \text{Id}_E$, avec

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{k+1} = u_k + v_k \\ v_{k+1} = 2u_k \end{cases}$$

3. On a, en utilisant la formule de récurrence avec $k + 1$ à la place de k ,

$$u_{k+2} = u_{(k+1)+1} = u_{k+1} + v_{k+1}$$

puis d'après l'expression de v_{k+1} : $\boxed{u_{k+2} = u_{k+1} + 2u_k}$.

4. D'après la question précédente, la suite $(u_k)_k$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est

$$r^2 = r + 2 \iff r^2 - r - 2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $(-1)^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$ donc elle admet deux racines réelles qui sont

$$r_1 = \frac{-(-1) - 3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-1) + 3}{2} = 2.$$

D'après le résultat du cours sur le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, il existe deux constantes k_1, k_2 telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = k_1 r_1^k + k_2 r_2^k = (-1)^k k_1 + 2^k k_2$$

En appliquant cette égalité avec $k = 0$, on obtient $k_1 + k_2 = u_0 = 0$, et avec $k = 1$,

$$-k_1 + 2k_2 = u_1 = u_0 + v_0 = 1.$$

Le couple (k_1, k_2) est donc solution du système

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1] \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 3k_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -1/3 \\ k_2 = 1/3 \end{cases}$$

En reportant dans l'expression de u_k , on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = -\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}2^k = \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3}$$

$$\text{et, si } k \geq 1, \quad v_k = 2u_{k-1} = \frac{2 \cdot (-1)^k + 2^k}{3}.$$

L'expression ci-dessus de v_k est également valable pour $k = 0$ (on obtient bien $v_0 = 1$). En fin de compte :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_k = \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3} \\ v_k = \frac{2 \cdot (-1)^k + 2^k}{3} \end{cases}}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(x, y, z) \in E$. En reportant l'expression de u_k et celle v_k obtenues à la question précédente dans le résultat de la question 2, on a

$$\varphi^k = \frac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3} \varphi + \frac{2 \cdot (-1)^k + 2^k}{3} \text{Id}_E = \frac{(-1)^k}{3} (2 \text{Id}_E - \varphi) + \frac{2^k}{3} (\varphi + \text{Id}_E)$$

avec

$$2 \text{Id}_E((x, y, z)) - \varphi((x, y, z)) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

$$\text{et } \varphi((x, y, z)) + \text{Id}_E((x, y, z)) = (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

On obtient donc

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in E, \forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k((x, y, z)) = \frac{(-1)^k}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix} + \frac{2^k}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}}$$

6. — Le vecteur nul appartient à F car $f(0_E) = \lambda 0_E = 0_E$.
 — Soient $u, v \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in F$. On a par linéarité de f et puisque $u, v \in F$

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v) = \lambda_1 \lambda u + \lambda_2 \lambda v = \lambda (\lambda_1 u + \lambda_2 v)$$

donc $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in F$.

Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. La démonstration est la même pour G .

7. Soit $u \in F \cap G$. Montrons que $u = 0_E$. On a

$$\begin{cases} f(u) = \lambda u & \text{car } u \in F \\ f(u) = \mu u & \text{car } u \in G \end{cases}$$

donc par différence $0 = \lambda u - \mu u = (\lambda - \mu)u$, et puisque $\lambda \neq \mu$ par hypothèse on obtient $u = 0_E$. Ceci montre que $F \cap G = \{0_E\}$ donc que

F et G sont en somme directe.

8. En développant l'hypothèse (3) de l'énoncé, on a

$$0_E = (f - \lambda \text{Id}_E) \circ (f - \mu \text{Id}_E) = f \circ f - \lambda f - \mu f + \lambda \mu \text{Id}_E = f \circ f - (\lambda + \mu)f + \lambda \mu \text{Id}_E$$

d'où en isolant $f \circ f$: $f \circ f = (\lambda + \mu)f - \lambda \mu \text{Id}_E$.

9. On raisonne par analyse-synthèse.

— Analyse. Supposons l'existence de u_1, u_2 vérifiant :

(a) $u_1 \in F$, ce qui équivaut à $f(u_1) = \lambda u_1$;

(b) $u_2 \in G$, ce qui équivaut à $f(u_2) = \lambda u_2$;

(c) $u_1 + u_2 = u$.

En appliquant f à l'égalité (c), il vient $f(u_1) + f(u_2) = f(u)$ donc, d'après (a) et (b),

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = f(u) \tag{d}$$

L'opération (d)– μ (c) permet d'éliminer u_2 et d'obtenir

$$(\lambda - \mu)u_1 = f(u) - \lambda u \quad \text{donc} \quad u_1 = \frac{f(u) - \lambda u}{\lambda - \mu}$$

où la division est autorisée car $\lambda \neq \mu$ d'après l'énoncé. De même, l'opération (d)– λ (c) donne

$$(\mu - \lambda)u_2 = f(u) - \mu u \quad \text{donc} \quad u_2 = -\frac{f(u) - \mu u}{\lambda - \mu}.$$

— Synthèse. On pose

$$u_1 = \frac{f(u) - \mu u}{\lambda - \mu} \quad \text{et} \quad u_2 = -\frac{f(u) - \lambda u}{\lambda - \mu}$$

et on vérifie que (u_1, u_2) vérifie les points (a), (b) et (c) ci-dessus.

D'une part, par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \frac{1}{\lambda - \mu} (f(f(u)) - \mu f(u)) = \frac{1}{\lambda - \mu} ((\lambda + \mu)f(u) - \lambda \mu u - \mu f(u)) \quad \text{d'après la question 8} \\ &= \frac{\lambda f(u) - \lambda \mu u}{\lambda - \mu} = \lambda \times \frac{f(u) - \mu u}{\lambda - \mu} = \lambda u_1 \end{aligned}$$

et l'hypothèse (a) est vérifiée. D'autre part, par le même raisonnement,

$$\begin{aligned} f(u_2) &= -\frac{1}{\lambda - \mu} (f(f(u)) - \lambda f(u)) = -\frac{1}{\lambda - \mu} ((\lambda + \mu)f(u) - \lambda \mu u - \lambda f(u)) \\ &= -\frac{\mu f(u) - \lambda \mu u}{\lambda - \mu} = \mu \times \left(-\frac{f(u) - \lambda u}{\lambda - \mu} \right) = \mu u_2 \end{aligned}$$

ce qui prouve (b). Enfin,

$$u_1 + u_2 = \frac{f(u) - \mu u}{\lambda - \mu} - \frac{f(u) - \lambda u}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda u - \mu u}{\lambda - \mu} = u$$

ce qui prouve (c).

Ainsi, les vecteurs u_1 et u_2 satisfont les propriétés suivantes : $u_1 \in F$, $u_2 \in G$ et $u = u_1 + u_2$. Ceci prouve le résultat :

il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ tels que $u = u_1 + u_2$.

10. — D'après la question 7, les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe.

— D'après la question 9, tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G , ce qui prouve l'inclusion $E \subset F + G$, et l'inclusion réciproque est évidente car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

On a donc $E = F \oplus G$: F et G sont supplémentaires dans E .

11. On développe l'expression du membre de gauche de l'équation (3) avec $\lambda = 2$ et $\mu = -1$:

$$(f - 2\text{Id}_E) \circ (f + \text{Id}_E) = f \circ f - 2f + f - 2\text{Id}_E = f \circ f - f - 2\text{Id}_E.$$

Or, d'après l'équation (2), $f \circ f = f + 2\text{Id}_E$. On obtient donc

$$(f - 2\text{Id}_E) \circ (f + \text{Id}_E) = 0_E$$

et l'hypothèse (3) est vérifiée avec $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

12. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\varphi(u) = 2u \iff \begin{pmatrix} x - y - z \\ -x + y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, F est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. Pour tout $u \in F$, on a alors

$$u = (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y \cdot (-1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) = -ye_1 - ze_2$$

ce qui prouve que (e_1, e_2) est génératrice de F , et c'est une famille libre car elle est formée de deux vecteurs non colinéaires. Par conséquent,

$$\text{les vecteurs } e_1 = (1, -1, 0) \text{ et } e_2 = (1, 0, -1) \text{ forment une base de } F.$$

13. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\varphi(u) = -u \iff \begin{pmatrix} x - y - z \\ -x + y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

On résout ce système linéaire par l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} \varphi(u) = -u & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1]{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2/3]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow (L_1 + L_2)/2] \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant z comme paramètre, il vient l'équivalence

$$\varphi(u) = -u \iff (x, y, z) = (z, z, z) = z \cdot (1, 1, 1).$$

Par conséquent, l'ensemble F est la droite vectorielle dirigée par $e_3 = (1, 1, 1)$.

14. Les réels a, b, c cherchés sont solution du système linéaire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a + b + c \\ y = -a + c \\ z = -b + c \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3] \begin{cases} x + y + z = 3c \\ y = -a + c \\ z = -b + c \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1]{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 3c \\ -x + 2y - z = -3a \\ -x - y + 2z = -3b \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne $a = \frac{1}{3}(x - 2y + z)$, $b = \frac{1}{3}(x + y - 2z)$ et $c = \frac{1}{3}(x + y + z)$.

Le résultat étant valable pour tout $(x, y, z) \in E$, ce calcul montre que

$$\forall u \in E, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, u = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

Autrement dit, la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E . Puisqu'elle est de cardinal 3 qui est égal à la dimension de E ,

la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

15. Puisque $e_1 \in F$ et par linéarité de φ , on a successivement

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= 2e_1 \\ \text{donc } \varphi^2(e_1) &= \varphi(\varphi(e_1)) = \varphi(2e_1) = 2\varphi(e_1) = 4e_1 \\ \text{puis } \varphi^3(e_1) &= \varphi(4e_1) = 4\varphi(e_1) = 8e_1\end{aligned}$$

et par récurrence immédiate, puis en procédant de même pour e_2 et e_3 (qui appartiennent respectivement à F et à G),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi^k(e_1) = 2^k e_1, \varphi^k(e_2) = 2^k e_2, \varphi^k(e_3) = (-1)^k e_3.$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(x, y, z) \in E$. Soient a, b, c les réels de la question 14. Par linéarité de φ^k , et d'après la question 15,

$$\varphi^k((x, y, z)) = a\varphi^k(e_1) + b\varphi^k(e_2) + c\varphi^k(e_3) = 2^k(ae_1 + be_2) + (-1)^k ce_3.$$

Reste à calculer les vecteurs $ae_1 + be_2$ et ce_3 en utilisant les définitions de e_1, e_2, e_3 et les expressions de a, b, c de la question 14. D'une part,

$$\begin{aligned}ae_1 + be_2 &= \frac{x - 2y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x + y - 2z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (x - 2y + z) + (x + y - 2z) \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et d'autre part, on a directement

$$ce_3 = \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

En reportant dans l'expression précédente de $\varphi^k((x, y, z))$, il vient

$$\varphi^k((x, y, z)) = \frac{2^k}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve bien le résultat de la question 5.

Exercice DS7.4

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par le théorème des racines de l'unité, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}(z + 1)^n = e^{2ina} &\iff ((z + 1)e^{-2ia})^n = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, (z + 1)e^{-2ia} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, z = -1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{2ia} = e^{\frac{2ik\pi}{n} + 2ia} - 1\end{aligned}$$

Les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ étant distincts pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z + 1)^n = e^{2ina}$$

admet n solutions et l'ensemble de ces solutions s'écrit :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n} + 2ia} - 1 \mid k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \right\}$$

2. Le polynôme P est la différence d'un polynôme de degré n et d'une constante donc ce polynôme a pour degré n . De plus, avec la formule du binôme de Newton, lorsqu'on développe $(X + 1)^n$, le monôme de plus haut degré est X^n donc P a pour coefficient dominant 1.
3. Avec les deux questions précédentes, le théorème de factorisation des polynômes nous donne :

$$P(X) = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - (e^{\frac{2ik\pi}{n} + 2ia} - 1)) = \prod_{k=0}^{n-1} (X + 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n} + 2ia}).$$

On peut également écrire, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$e^{2i(\frac{k\pi}{n} + a)} - 1 = e^{i(\frac{k\pi}{n} + a)} (e^{i(\frac{k\pi}{n} + a)} - e^{-i(\frac{k\pi}{n} + a)}) = 2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\frac{k\pi}{n} + a)}$$

ce qui donne

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\frac{k\pi}{n} + a)} \right).$$

4. On a

$$1 - e^{2ina} = P(0) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\frac{k\pi}{n} + a)} \right) = (-2i)^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{k\pi}{n})}.$$

Or, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{k\pi}{n})} = e^{i(\frac{\pi}{n}) \sum_{k=0}^{n-1} k} = e^{i(\frac{\pi}{n}) \frac{n(n-1)}{2}} = i^{n-1}.$$

Ainsi, on obtient :

$$1 - e^{2ina} = (-2i)^n e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) i^{n-1} = (-i)^{n-1} \times i^{n-1} \times 2^n \times (-i) e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

puis en divisant par e^{ina} :

$$-2i \sin(na) = e^{-ina} - e^{ina} = 2^n \times (-i) e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

et enfin

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$$

Exercice DS7.5

1. La variable aléatoire X_1 est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et la probabilité de $(X_1 = 1)$ est égale à $1/2$ (les boules étant supposées indiscernables). Ainsi, X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On a donc $E(X_1) = 1/2$ et $V(X_1) = 1/2 \times (1 - 1/2) = 1/4$.
2. On souhaite calculer la probabilité de l'évènement $(X_{p+1} = 1)$ lorsque l'évènement $(Z_p = k)$ est réalisé ce qui signifie qu'on a obtenu k boules noires lors des p premiers tirages et on souhaite piocher une boule blanche au $(p+1)$ -ième tirage. Par conséquent, on déjà obtenu k boules blanches en p tirages : on a donc ajouté $k \times c$ boules blanches et $(p-k) \times c$ boules noires dans l'urne. Après le $p^{ième}$ tirage, l'urne contient ainsi $p \times c + 2$ boules dont $kc + 1$ boules blanches et $(p-k) \times c + 1$ boules noires. On pioche une boule dans cette urne et on obtient une blanche. On obtient finalement :

$$P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc + 1}{pc + 2}$$

3. Pour obtenir une boule blanche au $(p+1)$ -ième tirage, il est nécessaire de connaître le contenu de l'urne à l'issue des p premiers tirages. Le contenu de cette urne dépend du nombre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages. Soit on a obtenu 0 boule blanche ($Z_p = 0$), soit 1 boule blanche ($Z_p = 1$), ..., soit p boules blanches ($Z_p = p$). On considère le système complet d'événements $(Z_p = k)_{0 \leq k \leq p}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^p P(Z_p = k \cap X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^p P(Z_p = k)P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^p \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) \\ &= \frac{1}{2+pc} \sum_{k=0}^p (kc+1)P(Z_p = k) = \frac{c}{2+pc} \sum_{k=0}^p kP(Z_p = k) + \frac{1}{2+pc} \sum_{k=0}^p P(Z_p = k) \\ &= \frac{c}{2+pc} E(Z_p) + \frac{1}{2+pc} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

4. Puisque Z_{p+1} représente le nombre de boules blanches obtenues lors des $(p+1)$ premiers tirages et que Z_p représente le nombre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages. Par conséquent, $Z_{p+1} - Z_p$ représente le nombre de boules blanches obtenue lors du $(p+1)$ -ième tirage, ce qui s'écrit par définition X_{p+1} donc

$$Z_{p+1} - Z_p = X_{p+1} \Leftrightarrow Z_{p+1} = Z_p + X_{p+1}$$

Par linéarité de l'espérance et comme $X_{p+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, on a

$$\begin{aligned} E(Z_{p+1}) &= E(Z_p + X_{p+1}) = E(Z_p) + E(X_{p+1}) = E(Z_p) + 0 \times P(X_{p+1} = 0) + 1 \times P(X_{p+1} = 1) \\ &= E(Z_p) + P(X_{p+1} = 1) = E(Z_p) + \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc} = \frac{1 + (2 + c + pc)E(Z_p)}{2 + pc} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$E(Z_{p+1}) = \frac{1 + (2 + c + pc)E(Z_p)}{2 + pc}.$$

5. On procède par récurrence en posant l'hypothèse de récurrence, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n-1$: $(\mathcal{H}_p) : E(Z_p) = \frac{p}{2}$

Initialisation : Par définition, on a $Z_1 = X_1$ donc $E(Z_1) = E(X_1) = \frac{1}{2}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_1)$.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n-2$. Supposons que $(\mathcal{H}_p)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{H}_{p+1})$, i.e. supposons que $E(Z_p) = \frac{p}{2}$ et montrons que $E(Z_{p+1}) = \frac{p+1}{2}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} E(Z_{p+1}) &= \frac{1 + (2 + c + pc)E(Z_p)}{2 + pc} = \frac{1 + (2 + c + pc)\frac{p}{2}}{2 + pc} = \frac{2 + (2 + c + pc)p}{2(2 + pc)} = \frac{2 + 2p + pc + p^2c}{2(2 + pc)} \\ &= \frac{(2p + p^2c) + (2 + pc)}{2(2 + pc)} = \frac{p(2 + pc) + (2 + pc)}{2(2 + pc)} = \frac{2 + pc}{2 + pc} \times \frac{p+1}{2} = \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$E(Z_p) = \frac{p}{2}.$$

Soit $p_i n \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comme $X_{p+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, X_{p+1} suit une loi de Bernoulli. il reste à déterminer son paramètre. Pour tout $p_i n \llbracket 1, n-1 \rrbracket : E(Z_p) = \frac{p}{2}$ donc, avec les questions précédente :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc} = \frac{1 + c \times \frac{p}{2}}{2 + pc} = \frac{2 + pc}{2(2 + pc)} = \frac{1}{2}$$

donc $P(X_{p+1} = 0) = 1 - P(X_{p+1} = 1) = \frac{1}{2}$.

En conclusion, la variable X_{p+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.