

DS7

Le temps imparti pour ce devoir est de 4 heures. Tout document ou matériel électronique est interdit.

La présentation des copies et la qualité de la rédaction seront largement prises en compte dans l'évaluation. Sauf mention contraire explicite, toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Si vous pensez repérer une erreur d'énoncé, vous devez le signaler sur votre copie et poursuivre votre composition. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez le cas échéant admettre le résultat demandé et l'utiliser si besoin dans toute question ultérieure du même exercice.

*Le devoir est constitué de 4 exercices indépendants. L'énoncé comporte 4 pages. **Les exercices 1 et 3 doivent être rédigés sur une copie séparée des exercices 2 et 4 et 5.***

Exercice DS7.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Factoriser le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ en 0.
- Montrer que l'application $\Phi : P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$ est un isomorphisme entre les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice DS7.2

Partie I : Une étude de fonction

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition qu'on déterminera.
- Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note à nouveau f ce prolongement.
- Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$, $|\sin x| < |x|$. En déduire le signe de f sur $[0, \pi/2]$.

Partie II : Une suite récurrente

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in]0, \pi/2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \pi/2]$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle est convergente vers une limite qu'on notera ℓ dont on donnera un encadrement. On note ℓ sa limite dans la suite.
- Montrer que $\ell = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la partie précédente).

Partie III : Détermination d'un équivalent de la suite

Dans cette partie, pour déterminer des équivalents, on considère que n tend vers $+\infty$.

- Justifier les équivalents : $u_{n+1} \sim u_n$ et $u_{n+1} + u_n \sim 2u_n$.
- Déduire de la question précédente que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim 2 \frac{u_n - \sin(u_n)}{u_n^3}.$$

- Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

est convergente de limite ℓ . Cette question, délicate, est indépendante du problème et pourra être admise.

10. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

11. En déduire que

$$\frac{1}{n u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

et donner un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice DS7.3

La partie I de cet exercice est indépendante de la partie II. La partie III utilise uniquement les notations de la partie I et le résultat de la question 10.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on rappelle que :

— la notation Id_E désigne l'application identité de E , autrement dit :

$$\forall u \in E, \text{Id}_E(u) = u$$

et Id_E est alors un endomorphisme de E ;

— la notation $0_{\mathcal{L}(E)}$ désigne la fonction constante sur E ayant pour valeur le vecteur nul de E , qui est également un endomorphisme de E .

— si f est un endomorphisme de E , on convient que f^0 désigne l'identité et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

et l'on a alors pour tout $(k, k') \in \mathbb{N}^2$: $f^{k+k'} = f^k \circ f^{k'}$.

Partie I - Calcul des itérées d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note φ l'endomorphisme de E défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z). \quad (1)$$

1. Calculer $\varphi \circ \varphi((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in E$ et en déduire que

$$\varphi \circ \varphi = \varphi + 2\text{Id}_E. \quad (2)$$

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_k et v_k tels que

$$\varphi^k = u_k \varphi + v_k \text{Id}_E.$$

On précisera les valeurs de u_0 et v_0 et on montrera que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{k+1} = u_k + v_k \\ v_{k+1} = 2u_k \end{cases}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{k+2} en fonction de u_{k+1} et u_k .

4. En déduire la valeur de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, ainsi que celle de v_k .

5. À l'aide de la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(x, y, z) \in E$, exprimer $\varphi^k((x, y, z))$ en fonction de (x, y, z) .

Partie II - Propriétés de certains endomorphismes dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe deux scalaires **distincts** λ, μ tels que

$$(f - \lambda \text{Id}_E) \circ (f - \mu \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (3)$$

On note $F = \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$ et $G = \{u \in E : f(u) = \mu u\}$.

6. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
7. Montrer que F et G sont en somme directe.
8. Exprimer $f \circ f$ en fonction de f et de l'identité.
9. Soit $u \in E$. En raisonnant par analyse-synthèse, et en utilisant l'hypothèse (3) et la question 8, montrer qu'il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ tels que $u = u_1 + u_2$.
10. Dédire des questions précédentes que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Partie III - Retour au calcul des itérées de φ

On reprend dans cette partie les notations de la partie I : ainsi, E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et φ est l'endomorphisme de E défini par l'équation (1).

11. À l'aide de l'équation (2), montrer que φ satisfait l'hypothèse (3) de la partie II avec $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

Comme dans la partie II, on note F et G les ensembles

$$F = \{u \in \mathbb{R}^3 : \varphi(u) = 2u\} \quad \text{et} \quad G = \{u \in \mathbb{R}^3 : \varphi(u) = -u\}$$

et les questions 6 et 10 montrent que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

12. Déterminer une équation de F et montrer que les vecteurs $e_1 = (1, -1, 0)$ et $e_2 = (1, 0, -1)$ forment une base de F .
13. Montrer que G est une droite vectorielle et en déterminer un vecteur directeur e_3 .
14. Soit $u = (x, y, z) \in E$. Déterminer des réels a, b, c , que l'on exprimera en fonction de x, y, z , tels que

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

En déduire que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

15. En utilisant le fait que $e_1 \in F$, $e_2 \in F$ et $e_3 \in G$, donner $\varphi^k(e_1)$, $\varphi^k(e_2)$ et $\varphi^k(e_3)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on justifiera sa réponse).
16. Dédire des deux questions précédentes le calcul de $\varphi^k((x, y, z))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(x, y, z) \in E$. Retrouver ainsi le résultat de la question 5.

Exercice DS7.4

Soit a un réel, n un entier naturel non nul.

1. Résoudre, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z + 1)^n = e^{2ina}$$

On déterminera le nombre de solutions de cette équation. On pourra poser $Z = (z + 1)/e^{2ia}$.

2. Déterminer, en justifiant, le coefficient dominant et le degré du polynôme

$$P(X) = (X + 1)^n - e^{2ina}.$$

3. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P(X) = (X + 1)^n - e^{2ina}$.
4. Déterminer, en calculant $P(0)$, un expression simple de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice DS7.5

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée (où c désigne un entier naturel non nul). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$). On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p qui désigne le nombre de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 (on justifiera sa réponse) et donner sans calcul son espérance et sa variance.

On considère dans la suite un entier naturel $p \leq n - 1$.

2. Démontrer soigneusement que

$$P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) = \frac{kc + 1}{pc + 2}$$

pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

4. Justifier que $Z_{p+1} = Z_p + X_{p+1}$ puis que lorsque $p \geq 1$, $E(Z_{p+1}) = \frac{1 + (2 + c + pc)E(Z_p)}{2 + pc}$.

5. Établir que lorsque $p \geq 1$, $E(Z_p) = \frac{p}{2}$ puis donner la loi de X_{p+1} .