

Proposition de corrigé du DS6

Exercice DS6.1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ où I est un intervalle. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

2. Soit M un point du plan de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{R}$. On a les équivalences :

$$M \in \mathcal{P} \iff [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 3 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \iff -4x - 3z + 29 = 0.$$

En conclusion, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $-4x - 3z + 29 = 0$.

3. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = (0, 0, 0, 0).$$

On obtient le système (échelonné) :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

En conclusion, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

Exercice DS6.2

1. — Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

L'ensemble F est non vide car il contient le vecteur nul. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: alors

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') &= \lambda \cdot (x - 2y) + \mu \cdot (x' - 2y') \\ &= 0 \text{ car } (u, v) \in F^2 \\ \text{et } 2(\lambda z + \mu z') - (\lambda t + \mu t') &= \lambda \cdot (2z - t) + \mu \cdot (2z' - t') \\ &= 0 \text{ car } (u, v) \in F^2. \end{aligned}$$

Le vecteur $\lambda u + \mu v$ appartient donc à F , puisqu'il vérifie les équations de F . Ainsi F est non vide et est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs, c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

- L'ensemble $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est un sous-espace vectoriel de E par définition du sous-espace vectoriel engendré par un ensemble.

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

2. — Par définition du sous-espace vectoriel engendré par un ensemble, la famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de G . Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$. Alors

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda, \mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{donc} \quad \lambda = \mu = 0.$$

Cette famille est donc libre, et en fin de compte, (e_1, e_2) est une base de G .

- Montrons que la famille (f_1, f_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0_E$. Alors

$$f_1 + \mu f_2 = (2\lambda, \mu, \lambda, 2\mu) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{donc} \quad \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi, (f_1, f_2) est une famille libre.

- Montrons que (f_1, f_2) est une famille génératrice de F . Soit $u \in F$, $u = (x, y, z, t)$. On sait alors d'après les équations de F que $x = 2y$ et que $t = 2z$. Par conséquent,

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ z \\ 2z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = yf_1 + zf_2.$$

Ainsi, tout vecteur de F est combinaison linéaire de f_1 et f_2 , qui est donc une famille génératrice de F .

- On conclut que $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est une base de } F}$.

3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = \lambda \cdot (1, 0, 1, 0) + \mu \cdot (0, 1, 0, 1) = (\lambda, \mu, \lambda, \mu).$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation de F , il vient

$$\lambda e_1 + \mu e_2 \in F \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

soit $\boxed{\lambda = \mu = 0}$.

4. La question précédente montre que si une combinaison linéaire de e_1 et e_2 appartient à F , alors c'est la combinaison linéaire nulle : puisque $\text{Vect}(e_1, e_2) = G$, ceci équivaut à dire que tout élément de G qui appartient également à F est le vecteur nul, et le vecteur nul appartient également à F et G puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E . Autrement dit, $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$.
5. On considère $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Résolvons l'équation « $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$ » d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 + \lambda_4 = z \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = t \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -2\lambda_3 + \lambda_4 = -x + z \\ -\lambda_3 + 2\lambda_4 = -y + t \end{cases} \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ 2\lambda_3 - \lambda_4 = -x + z \\ 3\lambda_4 = -x - 2y - z + 2t \end{cases}.$$

Ce système de quatre équations à quatre inconnues admet une solution unique car il est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls.

Ceci prouve que, pour tout $u \in E$, l'équation « $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2$ » admet une unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$: autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, f_1, f_2 , ce qui signifie exactement que $\boxed{(e_1, e_2, f_1, f_2) \text{ est une base de } E}$.

6. La question précédente montre que, pour tout $u \in E$, il existe un unique quadruplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2.$$

En notant $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et $w = \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2$, on a alors

$$\begin{cases} u = v + w \\ v \in G \\ w \in F \end{cases}$$

et une telle écriture est possible pour tout vecteur $u \in E$:

tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

7. — D'après la question 3.2, tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : autrement dit, $E \subset F + G$, et l'inclusion réciproque est évidente, donc $F + G = E$.

— D'après la question 2.2, $F \cap G = \{0_E\}$, donc la somme $F + G$ est directe.

Ceci prouve que $F \oplus G = E$:

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice DS6.3

1. Le plan $\mathcal{P}_1$ passe par O et est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{d}$, donc pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_1 &\iff [\vec{OM}, \vec{u}, \vec{d}] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à la troisième colonne,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_1 &\iff (y - z) - (-1) \cdot (x - z) = 0 \\ &\iff y - z + x - z = 0 \\ &\iff x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour équation cartésienne $x + y - 2z = 0$.

De la même manière, pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}_2 &\iff [\vec{OM}, \vec{v}, \vec{d}] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-y + z) - (-1) \cdot (-x - z) = 0 \\ &\iff x + y + 2z = 0 \end{aligned}$$

Le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x + y + 2z = 0$.

2. On déduit de leurs équations calculées à la question précédente que le plan $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1$ et que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2$, avec

$$\vec{n}_1(1, 1, -2) \quad \text{et} \quad \vec{n}_2(1, 1, 2).$$

Le plan $\mathcal{P}_1$ a $\vec{n}_1$ pour vecteur normal et contient O , donc d'après la formule donnant la distance d'un point à un plan connaissant un point et un vecteur normal de ce plan,

$$d(A, \mathcal{P}_1) = \frac{|\vec{OA} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}_1\|} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$

donc $d(A, \mathcal{P}_1) = \sqrt{6}$. Par la même formule,

$$d(A, \mathcal{P}_2) = \frac{|\vec{OA} \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_2\|} \quad \text{soit} \quad \boxed{d(A, \mathcal{P}_2) = \sqrt{6}}.$$

3. La droite $\mathcal{D}$ est normale à $\mathcal{P}_2$ donc elle est dirigée par le vecteur $\vec{n}_2$ calculé à la question précédente. Puisqu'elle passe par A , on a pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{n}_1 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc donnée par

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Par les opérations élémentaires « $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$ » et « $L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3$ », on déduit du résultat précédent que

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 + t \\ x - y = 0 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

ce qui donne pour système d'équations cartésiennes :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

4. Par définition du projeté orthogonal, le point H appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{AH}$ est normal à $\mathcal{P}_1$, autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires. D'après cette dernière condition, en notant (x, y, z) les coordonnées de H , il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x - 3 = t \\ y - 3 = t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = -2t \end{cases}$$

En reportant ces valeurs de x, y, z dans l'équation de $\mathcal{P}_1$ calculée à la première question, on obtient

$$(3 + t) + (3 + t) - 2 \cdot (-2t) = 0 \quad \text{donc} \quad 6 + 4t = 0 \quad \text{soit} \quad t = -\frac{3}{2}$$

puis en reportant cette valeur de t dans les coordonnées de x, y, z ,

$$\begin{cases} x = 3 - 3/2 = 3/2 \\ y = 3 - 3/2 = 3/2 \\ z = -2 \cdot (-3/2) = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right).}$$

5. On a pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} &\iff x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 = -12 \\ &\iff (x - 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 + z^2 = -12 \\ &\iff (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 0)^2 = 6 \end{aligned}$$

Puisque le point de coordonnées $(3, 3, 0)$ est A ,

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est la sphère de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{6}.}$$

6. Comme précédemment, le plan $\mathcal{P}_1$ étant dirigé par $\vec{n}_1$ et contenant le point O ,

$$d(M, \mathcal{P}_1) = \frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}_1|}{\|\vec{n}_1\|} \quad \text{donc} \quad \boxed{d(M, \mathcal{P}_1) = \frac{|x + y - 2z|}{\sqrt{6}}}$$

La droite Δ passe par O et est dirigée par $\vec{b}$ donc

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\vec{OM} \wedge \vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\|(-z, z, x-y)\|}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne
$$d(M, \Delta) = \frac{\sqrt{2z^2 + (x-y)^2}}{\sqrt{2}}.$$

7. Les deux distances étant positives, le point M est équidistant de la droite Δ et du plan $\mathcal{P}_1$ si et seulement si $d(M, \mathcal{P}_1)^2 = d(M, \Delta)^2$ ce qui donne

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}_1) = d(M, \Delta) &\iff \frac{(x+y-2z)^2}{6} = \frac{2z^2 + (x-y)^2}{2} \\ &\iff x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz = 6z^2 + 3x^2 + 3y^2 - 6xy \\ &\iff 0 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz + 4yz. \end{aligned}$$

donc une équation de l'ensemble cherché est $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2yz = 0$.

8. Dans le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $x = 1$, un point M de coordonnées $(1, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{E}$ si ses coordonnées vérifient l'équation précédente où l'on donne à x la valeur 1, autrement dit :

$$\begin{aligned} M(1, y, z) \in \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{E} &\iff 1 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2yz = 0 \\ &\iff (y+z)^2 - 4y + 2z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Avec le changement de coordonnées proposé, on a immédiatement $y + z = y'$ et par ailleurs, par somme et différence,

$$y' + z' = 2y \quad \text{et} \quad y' - z' = 2z.$$

En reportant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2yz = 0 &\iff y'^2 - 2(y' + z') + (y' - z') + 1 = 0 \\ &\iff y'^2 - y' - 3z + 1 = 0 \\ &\iff z' = \frac{1}{3}(y'^2 - y' + 1). \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une parabole, dont l'axe de symétrie est, dans les nouvelles coordonnées, celui d'équation $y' = -b/(2a)$ en notant a, b, c les coefficients du polynôme du second degré ci-dessus, donc $y' = 1/2$. En reportant les valeurs des anciennes coordonnées, on a les équivalences évidentes

$$y' = \frac{1}{2} \iff y + z = \frac{1}{2} \iff 2y + 2z = 1.$$

En conclusion,

l'ensemble $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{E}$ est une parabole incluse dans $\mathcal{P}_3$ ayant pour axe de symétrie la droite dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice DS6.4

- La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, par produit et composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ donc $e^{-1/x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $g(x) \rightarrow +\infty$. g n'est donc pas continue à gauche en 0, a fortiori non dérivable à gauche en 0. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on peut poser $X = -\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, et on a $g(x) = X^2 e^X \rightarrow 0$ par croissance comparée (et composition). On en déduit que g est continue à droite en 0. Pour $x > 0$, avec encore $X = -\frac{1}{x}$, on a $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -X^3 e^X \rightarrow 0$, donc g est dérivable à droite en 0 et $g'(0) = 0$.

En conclusion, g est continue et dérivable à droite mais pas à gauche en 0.

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{1-2x}{x^4} e^{-1/x}$ qui est du signe de $1-2x$. De plus, par opération, g admet pour limite 0 en $\pm\infty$. Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$\nearrow 4e^{-2}$	$\searrow 0$

Partie II : calcul d'aires

4. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Cette aire vaut $\mathcal{A}(h) = \int_h^1 g(x)dx = \int_h^1 \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx$. En effectuant le changement de variable $u = -\frac{1}{x}$, on obtient

$$\mathcal{A}(h) = \int_{-1/h}^{-1} e^u du = \left(\frac{1}{e} - e^{-1/h} \right).$$

5. Par composition et somme,

$$\mathcal{A}(h) \text{ admet une limite en } 0^+ \text{ qui vaut } 1/e.$$

Partie III : résolution d'une équation différentielle

6. Une primitive de $x \mapsto \frac{1-2x}{x^2}$, qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est $x \mapsto -\frac{1}{x} - 2 \ln x$ et on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda \frac{e^{-1/x}}{x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

sont $x \mapsto \lambda \frac{e^{-(1/x)}}{x^2}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). De même, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \mapsto \lambda \frac{e^{-1/x}}{x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est notamment solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et ainsi il existe des constantes λ, μ réelles tel que :

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \forall x < 0, \mu \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Par ailleurs, en évaluant l'équation en $x = 0$, on a nécessairement $y(0) = 0$. Mais y étant continue en 0, notamment à gauche, vu l'étude faite en question 1, on ne peut avoir que $\mu = 0$ (sinon la limite à gauche de y en 0 ne pourrait être nulle). Par conséquent,

$$\text{la fonction } y \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_-.$$

8. Si on fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et qu'on considère la fonction égale à $x \mapsto \lambda \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle sinon, on montre, comme à la question 3, qu'elle est continue puis dérivable en 0 et par conséquent solution de l'équation. Ainsi, la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie IV : dérivées successives et polynômes associés

9. On procède par récurrence. En posant $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$, on a bien la propriété demandée pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}.$$

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - 2(n+1)x P_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{-1/x}.$$

En posant $P_{n+1}(X) = X^2 P_n'(X) + (1 - 2(n+1)X)P_n(X)$, P_{n+1} est bien un polynôme (comme somme et produit de polynômes et de dérivée de polynôme), ce qui achève la récurrence.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[\quad g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}}$$

10. On a déjà $P_0(X) = 1$. En utilisant la relation précédente, on trouve

$$\boxed{P_1(X) = 1 - 2X, P_2(X) = 1 - 6X + 6X^2, P_3(X) = 1 - 12X + 36^2 - 24X^3}$$

et $\boxed{P_4(X) = 1 - 20X + 120X^2 - 240X^3 + 120X^4}$.

11. On montre par récurrence, compte-tenu du calcul précédent, que P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$. L'initialisation résulte de la question précédente été faite. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$. Le polynôme P_n peut s'écrire $a_n X^n + Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En utilisant la relation de récurrence donnant P_{n+1} , on en déduit que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= X^2(na_n X^{n-1} + Q'(X)) + (1 - 2(n+1)X)(a_n X^n + Q(X)) \\ &= a_n(n - 2(n+1))X^{n+1} + Q_1(X) \end{aligned}$$

avec $Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, le degré de P_{n+1} est $n+1$, son coefficient dominant est $-a_n(n+2) = (-1)^{n+1}(n+2)!$. Ceci achève la récurrence. En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \text{ et son coefficient dominant est } (-1)^n(n+1)!}.$$

12. En évaluant la relation de la question 9, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+1}(0) = P_n(0)$ et comme $P_0 = 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1}.$$

13. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = g(x)$, d'où on déduit, sur $\mathbb{R}$ que $f' = g$. Par une récurrence immédiate, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : f^{(n+1)} = g^{(n)}}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les dérivées d'ordre supérieur à 3 de $x \mapsto x^2$ sont nulles. Par conséquent, les fonctions mises en jeu étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = g^{(n+1)}(x) \times x^2 + \binom{n+1}{1} g^{(n)}(x) \times 2x + \binom{n+1}{2} g^{(n-1)}(x) \times 2$$

ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x) \times x^2 + \binom{n+1}{1} g^{(n)}(x) \times 2x + \binom{n+1}{2} g^{(n-1)}(x) \times 2$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} \times x^2 + (n+1) \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times 2x + \frac{n(n+1)}{2} \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} \times 2$$

puis en simplifiant et en multipliant par x^{2n+2} :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = P_{n+1}(x) + (n+1)2xP_n(x) + n(n+1)x^2P_{n-1}(x).$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P_{n+1}(X) = (1 - 2(n+1)X)P_n(X) - n(n+1)X^2P_{n-1}(X)}$$

15. En utilisant la relation de la question précédente et la relation de la question 9, par différence, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X^2 P'_n(X) = -n(n+1)X^2 P_{n-1}(X)$ ce qui donne en simplifiant par X^2 :

$$\boxed{P'_n(X) = -n(n+1)P_{n-1}(X)}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant la relation $P_{n+1}(X) = X^2 P'_n(X) + (1 - 2(n+1)X)P_n(X)$, on a :

$$P'_{n+1}(X) = 2X P'_n(X) + X^2 P''_n(X) + (1 - 2(n+1)X)P'_n(X) - 2(n+1)P_n(X).$$

On utilise désormais la relation de la question précédente qui s'écrit

$$P'_{n+1}(X) = -(n+1)(n+2)P_n(X)$$

et donne, avec la relation précédente :

$$-(n+1)(n+2)P_n(X) = 2X P'_n(X) + X^2 P''_n(X) + (1 - 2(n+1)X)P'_n(X) - 2(n+1)P_n(X)$$

puis

$$0 = X^2 P''_n(X) + (1 - 2(n+1)X + 2X)P'_n(X) + (-2(n+1) + (n+1)(n+2))P_n(X)$$

donc finalement :

$$\boxed{X^2 P''_n(X) + (1 - 2nX)P'_n(X) + n(n+1)P_n(X) = 0}.$$

Exercice DS6.5

1. On a pour tout $y \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\left(y + \frac{1}{y}\right) \times \left(y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) = y^{n+1} \times y + \frac{y}{y^{n+1}} + \frac{y^{n+1}}{y} + \frac{1}{y \times y^{n+1}}$$

$$\text{donc } \boxed{\left(y + \frac{1}{y}\right) \times \left(y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) = y^{n+2} + \frac{1}{y^{n+2}} + y^n + \frac{1}{y^n}}.$$

2. On procède par récurrence double sur n . Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « il existe un polynôme Q_n tel que, pour tout $y \in \mathbb{C}^*$, l'égalité demandée soit vraie ».

— Initialisation. Pour $n = 0$, on a

$$y^n + \frac{1}{y^n} = 1 + 1 = 2$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $Q_0 = 2$ et pour $n = 1$,

$$y^n + \frac{1}{y^n} = y + \frac{1}{y} = Q_1\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

avec $Q_1(X) = X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On a d'après la première question

$$y^{n+2} + \frac{1}{y^{n+2}} = \left(y + \frac{1}{y}\right) \times \left(y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) - \left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)$$

En posant $Y = y + 1/y$, on a par hypothèse de récurrence

$$y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}} = Q_{n+1}(Y) \quad \text{et} \quad y^n + \frac{1}{y^n} = Q_n(Y)$$

ce qui donne

$$y^{n+2} + \frac{1}{y^{n+2}} = Y Q_{n+1}(Y) - Q_n(Y) = Q_{n+2}(Y) = Q_{n+2}\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

où l'on a posé $Q_{n+2} = Y Q_{n+1} - Q_n$: $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

En conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n tel que

$$\forall y \in \mathbb{C}^*, y^n + \frac{1}{y^n} = Q_n \left(y + \frac{1}{y} \right)$$

et on a $Q_0 = 2$, $Q_1 = X$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+2} = XQ_{n+1} - Q_n$.

3. La relation de récurrence et les premiers termes donnent

$$Q_0 = 2, \quad Q_1 = X, \quad Q_2 = X^2 - 2, \quad Q_3 = X^3 - 3X, \quad Q_4 = X^4 - 4X^2 + 2.$$

Ceci nous amène à conjecturer que Q_n est de degré n et, sauf si $n = 0$, de coefficient dominant 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons cette propriété par récurrence double. Elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après les valeurs de Q_0 et Q_1 . Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que Q_{n+1} et Q_n sont de degrés respectifs $n + 1$ et n , et que Q_{n+1} est unitaire. On a alors par opérations sur les degrés

$$\deg(XQ_{n+1}) = \deg X + \deg Q_{n+1} = 1 + (n + 1) = n + 2$$

donc en particulier $\deg(XQ_{n+1}) > \deg Q_n$, ce qui conduit à

$$\deg Q_{n+2} = \max \left(\deg(XQ_{n+1}), \deg Q_n \right) = n + 2.$$

De plus, le coefficient dominant de XQ_{n+1} est 1, et ajouter Q_n qui est de degré strictement plus petit ne change pas le coefficient dominant, donc Q_{n+2} est unitaire si Q_{n+1} l'est, ce qui achève la récurrence.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg Q_n = n \text{ et, si } n \geq 1, Q_n \text{ est unitaire.}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $y \in \mathbb{C}^*$, on a les équivalences

$$y + \frac{1}{y} = z \iff y^2 + 1 = zy \iff y^2 - zy + 1 = 0.$$

Ceci est une équation du second degré d'inconnue y à coefficients complexes, qui admet toujours au moins une solution dans $\mathbb{C}$. D'après les équivalences ci-dessus,

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \text{ il existe } y \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } y + \frac{1}{y} = z.$$

Soit y un tel nombre complexe ; alors

$$f_n(z) = 0 \iff f_n \left(y + \frac{1}{y} \right) = 0$$

et, d'après la question 1, $f_n \left(y + \frac{1}{y} \right) = y^n + \frac{1}{y^n}$ ce qui donne le résultat :

$$f_n(z) = 0 \iff y^n + \frac{1}{y^n} = 0 \quad \text{avec} \quad z = y + \frac{1}{y}.$$

5. Soit $y \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\begin{aligned} y^n + \frac{1}{y^n} = 0 &\iff y^{2n} + 1 = 0 \\ &\iff y^{2n} = -1 \\ &\iff y^{2n} = e^{i\pi} = (e^{i\pi/(2n)})^{2n} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket, y = e^{2ik\pi/(2n)} e^{i\pi/(2n)} \end{aligned}$$

d'après les résultats du cours sur les racines N -ièmes d'un nombre complexe non nul donné, avec $N = 2n$ ici. Ainsi,

les nombres $y \in \mathbb{C}^*$ tels que $y^n + \frac{1}{y^n} = 0$ sont les $e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$, $k = 0, \dots, 2n-1$.

6. On déduit des questions précédentes que les solutions de l'équation $f_n(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes

$$z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + \frac{1}{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}}, \quad 0 \leq k \leq 2n-1.$$

Soit $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Alors d'après les formules d'Euler

$$e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + \frac{1}{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + e^{-\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{(2k+1)\pi}{2\pi} \in [0, \pi]$ donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) > \dots > \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$$

car le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$. Enfin, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la solution correspondant à l'indice $2n-1-k$, qui appartient à $\llbracket n, 2n-1 \rrbracket$, est

$$\cos\left(\frac{(2(2n-1-k)+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ est le même que celui pour $k = n, n+1, \dots, 2n-1$, et ces solutions sont deux à deux distinctes. En conclusion,

l'équation $f_n(z) = 0$ admet n solutions dans $\mathbb{C}$, qui sont les nombres réels

$$2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$