

DS6

Le temps imparti pour ce devoir est de 4 heures. Tout document ou matériel électronique est interdit.

La présentation des copies et la qualité de la rédaction seront largement prises en compte dans l'évaluation. Sauf mention contraire explicite, toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Si vous pensez repérer une erreur d'énoncé, vous devez le signaler sur votre copie et poursuivre votre composition. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez le cas échéant admettre le résultat demandé et l'utiliser si besoin dans toute question ultérieure du même exercice.

Le devoir est constitué de 5 exercices indépendants. L'énoncé comporte 3 pages. **Les exercices 1 et 4 doivent être rédigés sur une copie séparée des exercices 2, 3 et 5.**

Exercice DS6.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Énoncer avec précision (sans démonstration) la formule de Taylor avec reste intégral.
2. On se place dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace usuel $\mathcal{E}$. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(5, 1, 3)$ et dirigé par $\vec{u}(0, 1, 0)$ et $\vec{v}(3, 0, -4)$.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 0)$, $u_4 = (1, 0, 0, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

Exercice DS6.2

Dans tout l'exercice, on travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 0, 1, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, 1), \quad f_1 = (2, 1, 0, 0), \quad f_2 = (0, 0, 1, 2)$$

ainsi que les ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in E : x - 2y = 0 \text{ et } 2z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Donner une base de G et montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de F .
3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $\lambda e_1 + \mu e_2 \in F$, alors $\lambda = \mu = 0$.
4. En déduire l'ensemble $F \cap G$.
5. Montrer que la famille (e_1, e_2, f_1, f_2) est une base de E .
6. En déduire que tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
7. Déduire des questions précédentes que F et G sont deux espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice DS6.3

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace euclidien usuel ; dans tout l'exercice, toutes les coordonnées et équations seront exprimées dans ce repère. On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{d}$ suivants :

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \vec{i} - \vec{j}.$$

On appelle $\mathcal{P}_1$ le plan passant par O et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{d}$, et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{d}$. Enfin, on note A le point de coordonnées $(3, 3, 0)$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$, ainsi qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.

2. Calculer, en justifiant, la distance de A à $\mathcal{P}_1$, ainsi que la distance de A à $\mathcal{P}_2$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et normale à $\mathcal{P}_2$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, et un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.
4. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_1$. Calculer les coordonnées de H .
5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble ayant pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 6x + 6y - 12$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$.

Soit $\vec{b}$ le vecteur $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, et soit Δ la droite passant par O et dirigée par $\vec{b}$.

6. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Calculer la distance de M à $\mathcal{P}_1$ et la distance de M à Δ en fonction de x, y, z .
7. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points équidistants de Δ et $\mathcal{P}_1$. Montrer qu'une équation de $\mathcal{E}$ est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2yz = 0.$$

8. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan d'équation $x = 1$. En effectuant le changement de coordonnées

$$y' = y + z \quad \text{et} \quad z' = y - z,$$

justifier que l'ensemble $\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{E}$ est, dans $\mathcal{P}_3$, une parabole dont on précisera un axe de symétrie.

Exercice DS6.4

Partie I : Une étude de fonction

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étudier la continuité à droite et à gauche de g et la dérivabilité de g en 0.
3. Dresser le tableau des variations de g (on n'oubliera pas les limites).

Partie II : Calculs d'aires

4. Étant donné un nombre réel $h \in]0, 1[$, déterminer l'aire $\mathcal{A}(h)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et les droites d'équations $x = h$ et $x = 1$.
5. Déterminer, en justifiant son existence, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(h)$.

Partie III : Résolution d'une équation différentielle

6. Résoudre l'équation différentielle $(E) : x^2 y' + (2x - 1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$.
7. On considère une fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En utilisant la continuité de y en 0, montrer que y est nulle sur $\mathbb{R}^-$.
8. L'équation (E) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner au moins une solution.

Partie IV : Dérivées successives et polynômes associés

9. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$$

et que

$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x) \quad (1)$$

On admettra, dans la suite, l'unicité de P_n .

10. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .
11. Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
12. Montrer que $P_n(0)$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire sa valeur.
13. On considère f tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 g(x)$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$f^{(n+1)} = g^{(n)}.$$

14. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* :$

$$P_{n+1}(X) = (1 - 2(n+1)X)P_n(X) - n(n+1)X^2 P_{n-1}(X)$$

15. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* :$

$$P'_n(X) = -n(n+1)P_{n-1}(X).$$

16. Déduire de (1) que, pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$X^2 P''_n(X) + (1 - 2nX)P'_n(X) + n(n+1)P_n(X) = 0.$$

Exercice DS6.5

1. Développer, pour tout $y \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left(y + \frac{1}{y}\right) \times \left(y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n tel que :

$$\forall y \in \mathbb{C}^*, \quad y^n + \frac{1}{y^n} = Q_n\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

On pourra raisonner par récurrence double sur n et on démontrera notamment que :

$$Q_0 = 2, \quad Q_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_{n+2}(X) = XQ_{n+1}(X) - Q_n(X).$$

3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on procèdera à nouveau par récurrence double).

Dans les questions qui suivent, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note f_n la fonction polynomiale associée à Q_n . On cherche à résoudre l'équation $f_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $y \in \mathbb{C}^*$ tel que $y + \frac{1}{y} = z$. En déduire qu'on a alors

$$f_n(z) = 0 \iff y^n + \frac{1}{y^n} = 0 \quad \text{avec} \quad z = y + \frac{1}{y}.$$

5. Déterminer les nombres complexes y non nuls tels que $y^n + \frac{1}{y^n} = 0$.
6. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_n(z) = 0$ d'inconnue z . On précisera le nombre de solutions.