

Proposition de corrigé du DS5

Exercice DS5.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- En tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, comme $\exp$ est dérivable en 0, son taux d'accroissement en 0 admet une limite finie en 0 donnée par

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1.$$

En conclusion, f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$.

- Soit M un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par les points A et B de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, 8)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, 6)$. On a les équivalences :

$$M \in \mathcal{D} \iff \left| \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 6 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff 6x - 2y - 2 = 0.$$

La droite passant par les points A et B a pour équation cartésienne $6x - 2y - 2 = 0$.

- On note A_i l'événement « Piocher une boule blanche au i -ème tirage » et B l'événement « Piocher dans l'urne contenant deux boules blanches et quatre boules vertes » avec $i = 1, 2$. On peut supposer que A_1 et A_2 sont indépendants et que les tirages ainsi que les choix d'urne sont équiprobables.

Compte-tenu de l'énoncé, on doit déterminer la probabilité de $A_1 \cap A_2$.

Comme $(B, \overline{B})$ est un système complet d'événements non négligeables, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \mid B)P(B) + P(A_1 \cap A_2 \mid \overline{B})P(\overline{B}) = \frac{1}{2}(P(A_1 \cap A_2 \mid B) + P(A_1 \cap A_2 \mid \overline{B})).$$

De plus, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A_1 \cap A_2 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2 \mid A_1 \cap B)P(A_1 \cap B)}{P(B)} = P(A_2 \mid A_1 \cap B)P(A_1 \mid B) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

et de même $P(A_1 \cap A_2 \mid \overline{B}) = 1/3$.

En conclusion :

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}.$$

Exercice DS5.2

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée puis quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx} [\sin(x^3)] \times x - \sin(x^3)}{x^2} = \frac{3x^3 \cos(x^3) - \sin(x^3)}{x^2}$$

soit $f'(x) = 3x \cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a l'inégalité : $-1 \leq \sin(x^3) \leq 1$; si $x > 0$, on peut diviser par x sans changer le sens de cette inégalité, ce qui donne

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x^3)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

d'où l'on déduit par encadrement que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Si maintenant $x < 0$, alors l'encadrement obtenu est

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x^3)}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

qui conduit à la même conclusion : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $y \mapsto \cos y$ avec

$$\forall y \in \mathbb{R}, |\cos y| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$|\sin t - \sin 0| \leq 1 \times |t - 0|$$

soit $|\sin t| \leq |t|$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^3)}{x} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x} \right| \quad \text{soit} \quad 0 \leq |f(x)| \leq x^2$$

donc par encadrement, $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, i.e. $f \xrightarrow{0} 0$. La fonction f est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}^*$ et admet une limite réelle en 0, ce qui donne le résultat :

la fonction f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

4. On a vu à la question 1 que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 3x \cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$$

donc f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition, produit, quotient et différence de telles fonctions ; ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons que f' admet une limite finie en 0. D'une part,

$$3x \cos(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3 \times 0 \times \cos 0 = 0.$$

D'autre part, pour tout réel x , en appliquant l'inégalité de la question 3, on obtient

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^3)}{x^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \quad \text{soit} \quad 0 \leq \left| \frac{\sin(x^3)}{x^2} \right| \leq |x|$$

d'où l'on déduit par encadrement que $\frac{\sin(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et par différence

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

En fin de compte :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$;
- la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$;
- la fonction f' admet une limite réelle en 0.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de f est dérivable en 0, de dérivée égale à la limite de f' en 0 ; la dérivée de ce prolongement est donc continue en 0. En conclusion,

le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. On a pour tout réel x les équivalences

$$\cos(x^3) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x^3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\text{et } \cos(x^3) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x^3 = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \sqrt[3]{2k\pi}.$$

Ceci invite à considérer les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \text{ et } y_n = \sqrt[3]{2n\pi}.$$

Par opérations et compositions,

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sin(x_n^3) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, & \sin(y_n^3) &= \sin(2n\pi) = 0, \\ \cos(x_n^3) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0 & \text{et} & \cos(y_n^3) = \cos(2n\pi) = 1.\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de f' calculée à la question 1,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'(x_n) = 3x_n \cos(x_n^3) - \frac{\sin(x_n^3)}{x_n^2} = -\frac{1}{x_n^2} \text{ et } f'(y_n) = 3y_n \cos(y_n^3) - \frac{\sin(y_n^3)}{y_n^2} = 3y_n.$$

Par opérations sur les limites, puisque $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendent vers $+\infty$, on a

$$f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad f'(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En fin de compte, puisque $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendent vers $+\infty$ et que $(f'(x_n))_n$ et $(f'(y_n))_n$ ont deux limites distinctes,

la fonction f' n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice DS5.3

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Pour tout $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, la matrice A^k est nulle, donc on a

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t^1}{1!} A^1 + \frac{t^2}{2!} A^2 = I_p + tA + \frac{t^2}{2} A^2.$$

La suite $(E_n(t))_n$ est stationnaire, c'est également le cas de la suite de chacun de ses coefficients, qui sont donc convergents vers ceux de la matrice ci-dessus. On peut conclure :

la suite $(E_n(t))_n$ converge et $E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2} A^2$.

2. Soit $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}E(s) \times E(t) &= \left(I_p + sA + \frac{s^2}{2} A^2\right) \times \left(I_p + tA + \frac{t^2}{2} A^2\right) \\ &= I_p + sA + \frac{s^2}{2} A^2 + tA + stA^2 + \frac{s^2 t}{2} A^3 + \frac{s^2}{2} A^2 + \frac{s^2 t}{2} A^3 + \frac{s^2 t^2}{4} A^4.\end{aligned}$$

Puisque $A^3 = A^4 = 0$, on obtient en regroupant les termes dans la somme ci-dessus :

$$\begin{aligned}E(s) \times E(t) &= I_p + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + st + \frac{t^2}{2}\right) A^2 \\ &= I_p + (s+t)A + \frac{s^2 + 2st + t^2}{2} A^2 \\ &= I_p + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2} A^2\end{aligned}$$

soit $E(s) \times E(t) = E(s+t)$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$E(t) \times E(-t) = E(t-t) = E(0) \quad \text{et} \quad E(-t) \times E(t) = E(-t+t) = E(0).$$

Or, d'après l'expression de $E(t)$ trouvée à la question 1, $E(0) = I_p$, et les égalités précédentes deviennent

$$E(t) \times E(-t) = E(-t) \times E(t) = I_p.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } E(t) \text{ est inversible et son inverse est : } E(t)^{-1} = E(-t) = I_p - tA + \frac{t^2}{2}A^2.}$$

4. On calcule successivement

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 \times A = 0_3.$$

Les résultats précédents s'appliquent à la matrice A ; en particulier,

$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit :
$$\boxed{E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t+t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; on résout le système $PX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} PX = B & \iff \begin{cases} x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow -L_1 + L_2] \begin{cases} x - y = a \\ 2y = -a + b \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2] \begin{cases} 2x = a + b \\ 2y = -a + b \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b) \\ y = \frac{1}{2}(-a + b) \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet une solution unique : la matrice P est inversible, et son inverse est donnée par la « formule » de la solution en fonction de a et b .

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible et : } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. On calcule successivement

$$\begin{aligned} PA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } PAP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit
$$\boxed{D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

D'après le résultat du cours sur les puissances d'une matrice diagonale :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On remarque alors que l'égalité $D = PAP^{-1}$ entraîne, en multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} ,

$$P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = I_2AI_2 = A.$$

et l'on a alors les égalités suivantes :

$$A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}DI_2DP = P^{-1}D^2P$$

et, de même,

$$A^3 = P^{-1}DPP^{-1}D^2P = P^{-1}D^3P \quad \text{puis} \quad A^4 = P^{-1}D^4P$$

et par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}D^kP$, donc

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k & 1 \\ (-1)^{k+1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^k + 1 & -(-1)^k + 1 \\ -(-1)^k + 1 & (-1)^k + 1 \end{pmatrix}}.$$

7. On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{donc } \frac{t^k A^k}{k!} &= \frac{1}{2} \times \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \frac{(-t)^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, par sommation de l'égalité précédente :

$$\boxed{E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

8. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après l'indication de l'énoncé, puisque, par somme ou différence, chacun des coefficients de $E_n(t)$ a une limite quand $n \rightarrow +\infty$, la suite de matrices $(E_n(t))_n$ converge et sa limite est donnée par

$$E(t) = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^t + e^{-t})/2 & (e^t - e^{-t})/2 \\ (e^t - e^{-t})/2 & (e^t + e^{-t})/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \boxed{E(t) = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}}.$$

Exercice DS5.4

Partie I : Une étude de fonction

- Les fonctions $\ln$ et $x \mapsto 1 + x^2$ sont définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ donc f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On a, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x^2 \ln x + 1}{x(1 + x^2)^2}$$

$$\text{donc } \boxed{f'(x) \text{ est du signe de } g(x) = x^2 - 2x^2 \ln x + 1}.$$

- La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme et, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$g'(x) = -4x \ln x$$

qui est du signe de $-\ln x$ c'est-à-dire du signe de $1 - x$. De plus, par somme et croissance comparée pour la première limite et par somme et produit pour la seconde :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

On a également $g(1) = 2$. On obtient ainsi le tableau :

x	0	1	$+\infty$
g'	+	0	–
g	0	1	$-\infty$

4. La fonction g est strictement décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $] -\infty, 2]$ (ce dernier intervalle découlant de la question précédente). Comme $0 \in] -\infty, 2]$, il existe un unique réel $m \in [1, +\infty[$ tel que $g(m) = 0$. De plus, pour tout $x \in]0, 1]$, $g(x) > 0$. En conclusion, l'équation d'inconnue $x \in]0, +\infty[: g(x) = 0$ admet une unique solution m . Ainsi, g est strictement positive sur $]0, m[$ et strictement négative sur $]m, +\infty[$.
5. On a les équivalences :

$$g(m) = 0 \iff 1 + m^2 - 2m^2 \ln m = 0 \iff \frac{1}{2m^2} = \frac{\ln m}{1 + m^2}$$

donc $f(m) = \frac{1}{2m^2}$.

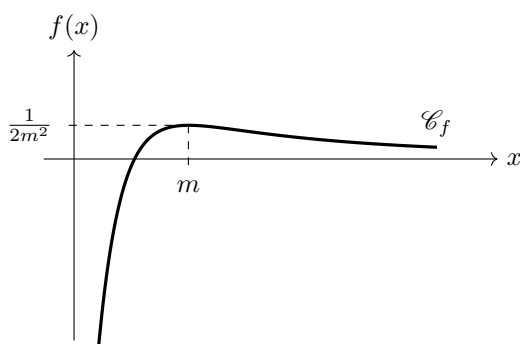
6. Par quotient limites, on a directement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. On peut écrire, pour x au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Ainsi, par croissance comparée et produit, f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On obtient le tableau, puisque f' est du signe de g :

x	0	m	$+\infty$
f'	+	0	–
f	$-\infty$	$\frac{1}{2m^2}$	0

puis la courbe



Partie II : Une fonction définie par une intégrale

7. La fonction f est continue et positive sur $[1, +\infty[$, négative sur $]0, 1]$. Ainsi, si $x \in [1, +\infty[$, comme f est positive sur $[1, x]$, par positivité de l'intégrale :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \geq 0$$

et de même, si $x \in]0, 1]$,

$$-F(x) = \int_x^1 f(t) dt \leq 0.$$

Finalemment, F est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par définition, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F' = f$.

8. Par quotient, comme Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, φ est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus, Arctan est dérivable en 0 et $\text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2}$ donc, par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1.$$

Finalemment, φ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(0) = 1$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u : t \mapsto \text{Arctan } t$ et $v : t \mapsto \ln t$ qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$. En intégrant par parties, on obtient :

$$F(x) = \int_1^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt = \text{Arctan } x \ln x - \int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t} dt$$

car $\ln 1 = 0$. En conclusion, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \text{Arctan } x \ln x - \int_1^x \varphi(t) dt.$$

10. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_1^x \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_1^0 \varphi(t) dt = - \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\text{Arctan } x \ln x = \varphi(x) \times x \ln x$$

donc par croissance comparée et produit, on a :

$$\text{Arctan } x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi(0) \times 0 = 0.$$

En conclusion, F est prolongeable par continuité en 0 par

$$F(0) = \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

11. En tant que primitive d'une fonction continue, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par somme, le fonction définie par $\psi : x \mapsto F(x) - F(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\psi'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2} F'(1/x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{-\ln x}{1+1/x^2} = 0.$$

Ainsi, ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\psi(1) = F(1) - F(1) = 0$: ψ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $F(x) = F(1/x)$.

12. Comme $1/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par composition, $x \mapsto F(1/x)$ admet pour limite $F(0)$ en $+\infty$ donc, avec la question précédente :

$$F(x) = F(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} F(0).$$

Partie III : Calcul approché de $F(0)$

On définit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_p : t \mapsto t^p \ln t.$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $ix \neq 1$ dont, avec la formule de la somme géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n ((ix)^2)^k = \frac{1 - ((ix)^2)^{n+1}}{1 - (ix)^2} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}.$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$. On pose $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$ qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_1^x t^k \ln t \, dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) \, dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t} \, dt = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)^2}$$

donc :

$$\int_1^x t^k \ln t \, dt = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)^2}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$. On a, avec les questions précédentes :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \ln t \, dt + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \, dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^x t^{2k} \ln t \, dt + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \, dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x^{2k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)^2} \right) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \, dt \end{aligned}$$

donc, en faisant tendre x vers 0, par croissance comparée :

$$F(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} + (-1)^{n+1} \int_1^0 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \, dt$$

où la fonction $t \mapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t$ est prolongée par continuité en 0 par la valeur 0. Cette fonction étant négative sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} \right| + \int_1^0 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln t \, dt \leq \int_1^0 t^{2n+2} \ln t \, dt$$

car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1/(1+t^2) \leq 1$. En calculant, cette dernière intégrale comme à la question précédente :

$$\int_1^0 t^{2n+2} \ln t \, dt = \frac{1}{(2n+3)^2}$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

16. En choisissant $n = 4$ dans l'égalité précédente, on a : $\frac{1}{(2 \times 4 + 3)^2} \leq 1/10^2 = 10^{-2}$. Ainsi, une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} près est

$$\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - 1/9 + 1/25 - 1/49 + 1/81.$$

En conclusion, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$ est $\frac{91369}{99225}$.

Exercice DS5.5

1. Avant le premier tirage, il y a b boules blanches et r boules rouges, donc la probabilité que la première boule tirée soit blanche est

$$P(B_1) = \frac{b}{b+r}.$$

Le couple $(B_1, \overline{B_1})$ forme un système complet d'événements : d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1}) \\ &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})(1 - P(B_1)) \\ &= \frac{b}{b+r}P(B_2|B_1) + \frac{r}{b+r}P(B_2|\overline{B_1}) \end{aligned}$$

sachant que :

- si la première boule tirée est blanche, avant le deuxième tirage, il y a $b+c$ boules blanches et $b+c+r$ boules au total, donc

$$P(B_2|B_1) = \frac{b+c}{b+c+r}$$

- tandis que si elle est rouge, il y a b boules blanches, donc

$$P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b}{b+c+r}.$$

En reportant dans l'expression précédente,

$$\begin{aligned} P(B_2) &= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+c}{b+c+r} + \frac{r}{b+r} \times \frac{b}{b+c+r} \\ &= \frac{b^2 + bc + br}{(b+r)(b+c+r)} \end{aligned}$$

soit après simplification : $P(B_2) = \frac{b}{b+r}$.

2. Il s'agit ici de déterminer $P(B_1|B_2)$. D'après la formule de Bayes,

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)}$$

avec $P(B_2|B_1) = \frac{b+c}{b+c+r}$, et les événements B_1 et B_2 sont équiprobables d'après la question 1, donc

$$P(B_1|B_2) = \frac{b+c}{b+c+r}.$$

3. Les événements B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si $P(B_2|B_1) = P(B_2)$, et l'on a les égalités

$$P(B_2|B_1) = \frac{b+c}{b+c+r} \quad \text{et} \quad P(B_1) = \frac{b}{b+r}$$

et les équivalences suivantes :

$$P(B_2|B_1) = P(B_1) \iff \frac{b+c}{b+c+r} = \frac{b}{b+r} \iff (b+c)(b+r) = b(b+c+r) \iff rc = 0$$

ce qui est impossible puisque r et c sont des entiers naturels non nuls. En conclusion,

les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

4. On applique le résultat de la question 1, en remplaçant b et r , respectivement, par les nouvelles variables x et y :

$$u_1(x, y) = \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad u_2(x, y) = \frac{x}{x+y}.$$

5. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$:

$$P(B_n) = P(B_n|B_1)P(B_1) + P(B_n|\overline{B_1})P(\overline{B_1})$$

puis on utilise que, par définition de u_1 ,

$$P(B_1) = u_1(x, y) = \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = \frac{y}{x+y}$$

ce qui donne

$$u_n(x, y) = P(B_n) = \frac{x}{x+y}P(B_n|B_1) + \frac{y}{x+y}P(B_n|\overline{B_1}).$$

Il reste à déterminer $P(B_n|B_1)$ et $P(B_n|\overline{B_1})$. Le nombre $P(B_n|B_1)$ est égal à la probabilité que la n -ième boule tirée soit blanche sachant que la première était blanche : c'est donc la probabilité que, après une série de $n-1$ tirage (du deuxième au n -ième) selon le même protocole mais en démarrant avec $x+c$ boules blanches et y boules rouges, la dernière boule tirée soit blanche. Ainsi,

$$P(B_n|B_1) = u(x+c, y)$$

et par le même raisonnement, $P(B_n|\overline{B_1}) = u(x, y+c)$. En reportant, on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}u_n(x+c, y) + \frac{y}{x+y}u_n(x, y+c)}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_n(x, y) = x/(x+y)$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation. D'après la question 4, pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_1(x, y) = x/(x+y)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. D'après la question 4,

$$u_{n+1}(x, y) = \frac{x}{x+y}u_n(x+c, y) + \frac{y}{x+y}u_n(x, y+c).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$u_n(x+c, y) = \frac{x+c}{x+c+y} \quad \text{et} \quad u_n(x, y+c) = \frac{x}{x+y+c}$$

donc on obtient en reportant dans l'expression précédente de $u_{n+1}(x, y)$:

$$u_{n+1}(x, y) = \frac{x(x+c)}{(x+y)(x+y+c)} + \frac{yx}{(x+y)(x+y+c)} = \frac{x(x+c+y)}{(x+y)(x+y+c)} = \frac{x}{x+y}$$

et ceci est valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

En conclusion, ceci montre bien que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}}$$