
DS5

Le temps imparti pour ce devoir est de 4 heures. Tout document ou matériel électronique est interdit.

La présentation des copies et la qualité de la rédaction seront largement prises en compte dans l'évaluation. Sauf mention contraire explicite, toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées. Si vous pensez repérer une erreur d'énoncé, vous devez le signaler sur votre copie et poursuivre votre composition. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez le cas échéant admettre le résultat demandé et l'utiliser si besoin dans toute question ultérieure du même exercice.

*Le devoir est constitué de 5 exercices indépendants. L'énoncé comporte 4 pages. **Les exercices 1 et 4 doivent être rédigés sur une copie séparée des exercices 2, 3 et 5.***

Exercice DS5.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation cartésienne, dans un repère quelconque, de la droite passant par les points A et B de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, 8)$.
3. On dispose de deux urnes, l'une contenant deux boules blanches et quatre boules vertes, et l'autre contenant deux boules blanches et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on effectue deux tirages sans remise dans l'urne choisie. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

Exercice DS5.2

Dans cet exercice, on considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin(x^3)}{x} \end{cases}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ des limites réelles que l'on déterminera.
3. Montrer que pour tout réel t , $|\sin t| \leq |t|$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis). En déduire que f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.
4. Montrer que le prolongement obtenu à la question précédente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser à nouveau l'inégalité de la question 3, et on mentionnera précisément le nom du théorème utilisé, dont on vérifiera soigneusement les hypothèses.
5. Montrer que f' n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice DS5.3

Soit A une matrice carrée fixée. Pour tout $(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on note

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k.$$

On étudie dans cet exercice le comportement de la suite de matrices $(E_n(t))_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans certains cas particuliers pour la matrice A . On dit qu'une suite de matrices *converge* lorsque tous ses coefficients convergent ; lorsque, pour t fixé, la suite $(E_n(t))_n$ converge, on note $E(t)$ sa limite (qui est la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de $E_n(t)$).

Les questions 1 à 4 de cet exercice peuvent être traitées indépendamment des questions 5 à 8.

Partie I : le cas d'une matrice dont une puissance est nulle

Dans les questions 1 à 3, on fixe un entier naturel $p \geq 1$, et l'on suppose que $A \in M_p(\mathbb{R})$ et vérifie $A^3 = 0$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(E_n(t))_n$ converge et que sa limite est donnée par

$$E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

2. Montrer que pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $E(t) \times E(s) = E(t + s)$.
3. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est inversible et donner son inverse.
4. On suppose que $p = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et A^3 puis donner $E(t)$, pour tout réel t , sous la forme d'un tableau de nombres.

Partie II : un cas particulier en taille 2

Dans toutes questions suivantes, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
6. On pose $D = PAP^{-1}$. Calculer D puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n et A^n .
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de $E_n(t)$ faisant intervenir deux sommes.
8. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(E_n(t))_n$ est convergente et déterminer $E(t)$.

Exercice DS5.4**Partie I : Une étude de fonction**

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et justifier que f est dérivable sur cet ensemble.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
3. Dresser le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$ (on déterminera notamment les limites en 0^+ et en $+\infty$ ainsi que $g(1)$).
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une unique solution qu'on notera m . En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$ en fonction de m .
5. Montrer que $f(m) = \frac{1}{2m^2}$.
6. Dresser le tableau des variations de f (on déterminera notamment les limites en 0^+ et en $+\infty$) puis tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

7. Déterminer le signe de F sur $]0, +\infty[$ puis justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, sur $]0, +\infty[$, F' .

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$.

8. Déterminer le domaine de définition de φ et justifier que φ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On notera, dans la suite, encore φ ce prolongement.
9. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \operatorname{Arctan} x \ln x - \int_1^x \varphi(t) dt.$$

10. Justifier que F est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$. On pourra utiliser la limite de la question 8. On note à nouveau F ce prolongement.
11. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.
12. Justifier que F admet une limite finie en $+\infty$, que l'on déterminera sous la forme d'une intégrale (il n'est pas demandé de calculer explicitement cette intégrale).

Partie III : Calcul approché de $F(0)$

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
14. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, $\int_1^x t^k \ln t dt = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)^2}$.
15. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

16. Déterminer une valeur approchée rationnelle de $F(0)$ à 10^{-2} près.

Exercice DS5.5

On considère une urne contenant initialement des boules blanches et des boules rouges. On effectue une série de tirages dans cette urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, ainsi que c autres boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n -ième tirage », et R_n l'événement « on tire une boule rouge au n -ième tirage ».

On note dans un premier temps b et r les nombres respectifs de boules blanches et rouges avant le premier tirage.

1. Donner $P(B_1)$ puis $P(B_2)$.
2. On suppose que la deuxième boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?
3. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on note désormais $u_n(x, y)$ la probabilité que la n -ième boule tirée soit blanche lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

4. Donner $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$.
5. Montrer en utilisant un système complet d'événements associé au premier tirage que

$$\forall (x, y, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_{n+1}(x, y) = \frac{x}{x+y} u_n(x+c, y) + \frac{y}{x+y} u_n(x, y+c).$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}.$$