

Proposition de corrigé du DS4

Exercice DS4.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer B^2 et B^3 puis, en remarquant que $A = 2I_3 + B$, calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}.$$

Donner le sens de variations de $(u_n)_n$ puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

En déduire, en simplifiant le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus, que $(u_n)_n$ converge.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à cinq. Une course oppose n chevaux numérotés de 1 à n . Donner le nombre de classements des cinq premiers possibles :

- sans que l'ordre importe (par exemple, les classements « 2, 7, 9, 10, 4 » et « 10, 7, 9, 4, 2 » sont considérés comme identiques car ils sont constitués des cinq mêmes chevaux) ;
- puis en tenant compte de l'ordre.

Exercice DS4.2

1. On sait que $[\vec{u}]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $[\vec{v}]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a les quatre égalités :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1, & \|\vec{v}\| &= \sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{-3}{5} \times \frac{-4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 0 & \text{et} & [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{-3}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{-4}{5} \times \frac{4}{5} = 1. \end{aligned}$$

Comme $[\vec{u}, \vec{v}] > 0$, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe du plan. Les trois premières égalités montrent ensuite que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée.

2. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_1 &\iff [\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = 0 & M \in \mathcal{D}_2 &\iff [\vec{v}, \overrightarrow{AM}] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} \frac{-3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & y-4 \end{vmatrix} = 0 & &\iff \begin{vmatrix} \frac{-4}{5} & x-3 \\ \frac{3}{5} & y \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \frac{-3}{5}(y-4) - \frac{4}{5}x = 0 & &\iff \frac{-4}{5}y - \frac{3}{5}(x-3) = 0 \\ \boxed{M \in \mathcal{D}_1 \iff 4x + 3y - 12 = 0} & & \boxed{M \in \mathcal{D}_2 \iff 3x - 4y - 9 = 0} \end{aligned}$$

Finalement, $4x + 3y - 12 = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ et $3x - 4y - 9 = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$.

3. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &\iff \begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 3x - 4y - 9 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 25x - 75 = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow 4L_1 + 3L_2 \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est le point de coordonnées $(3, 0)$ dans le repère $\mathcal{R}$, c'est donc le point Ω .

4. Par définition des coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{\Omega M} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = 3\overrightarrow{i}$. D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = 3\overrightarrow{i} + x'\left(\frac{-3}{5}\overrightarrow{i} + \frac{4}{5}\overrightarrow{j}\right) + y'\left(\frac{-4}{5}\overrightarrow{i} - \frac{3}{5}\overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(\frac{-3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 3\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

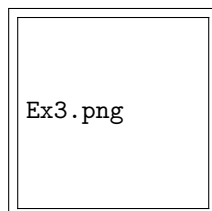
Par unicité des coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$, on en déduit :

$$\begin{cases} x = \frac{-3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 3 \\ y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \end{cases}$$

5. D'après les relations précédentes : $3x - 4y = -5x' + 9$ et $4x + 3y = -5y' + 12$ donc

$$\begin{aligned}(3x - 4y)(4x + 3y) - 72x + 21y + 83 &= (-5x' + 9)(-5y' + 12) - 72\left(\frac{-3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 3\right) + 21\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right) + 83 \\ &= 25x'y' - 60x' - 45y' + 108 + \frac{72 \times 3 + 84}{5}x' + \frac{72 \times 4 - 63}{5}y' - 72 \times 3 + 83 \\ &= 25x'y' - 25\end{aligned}$$

Comme $(3x - 4y)(4x + 3y) - 72x + 21y + 83 = 25(x'y' - 1)$, une équation de l'ensemble $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est $x'y' = 1$. $\mathcal{C}$ est une hyperbole (de façon analogue à la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 1/x$) dont les asymptotes sont les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. On a la figure :



Exercice DS4.3

Pour tout réel m , on considère le système (S_m) suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= m - 2 \\ -2x + 4y + (m - 2)z &= 0 \\ x + (2 - m)y + 4z &= 2m - 4 \end{cases}$$

Dans les trois premières questions, on suppose que $m = 3$.

- Donner une matrice A et un vecteur colonne B tels que S_m s'écrive sous forme matricielle « $AX = B$ », où X est le vecteur colonne des inconnues.
- Montrer que A est inversible et calculer son inverse (on écrira A^{-1} sous la forme « fraction $\times$ matrice à coefficients entiers »).
- En déduire que si $m = 3$, le système (S_m) admet une unique solution et donner cette solution.

Dans les questions qui suivent, on ne suppose plus que $m = 3$.

- Échelonner le système (S_m) et montrer qu'il est équivalent à un système (S'_m) dont la dernière ligne a la forme suivante :

$$-(m^2 - m - 2)z = \dots$$

où les points de suspension sont à remplacer par une expression en fonction de m . En déduire pour quelles valeurs de m ce système admet une solution unique.

- Quel est l'ensemble des solutions de (S_m) lorsque $m = -1$?
- Donner précisément l'ensemble des solutions de (S_m) lorsque $m = 2$.
- On suppose que $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Résoudre (S_m) . (On pourra commencer par simplifier la dernière ligne du système obtenu à la question 4 par $m + 1$).

Exercice DS4.4

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ car d'une part, $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et d'autre part, la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- Avec la question précédente :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \boxed{\ln(1+\sqrt{2})}.$$

On a également : $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2}-1}$

- Soit $n \geq 0$ un entier. On a :

$$u_n - u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $1-x \geq 0$, donc $\frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit l'inégalité $\boxed{u_n - u_{n+1} \geq 0}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Soit $x \in [0, 1]$. On a $0 \leq x \leq 1$ puis, comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, 1]$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ et enfin $\boxed{1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[1, 2]$.
- Soit n un entier naturel et $0 \leq x \leq 1$. D'après la question précédente et comme la fonction inverse est décroissante sur $[1, \sqrt{2}]$, on a successivement :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \quad \text{puis} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} x^n \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale et comme $0 < 1$, on a donc :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx \quad \text{ce qui donne} \quad \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

- La suite (u_n) est une suite décroissante de termes positifs. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Finalement, d'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$.
- Soit $n \geq 3$ un entier. On a :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n-2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2+1} dx \end{aligned}$$

ce qui s'écrit $\boxed{u_n + u_{n-2} = I_n}$.

8. Soit $n \geq 3$ un entier. En intégrant par parties, puisque $x \mapsto \frac{1}{n-1}x^{n-1}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{n-1} x^{n-1} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n-1} x^{n-1} \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{u_n}{n-1} \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout entier $n \geq 3$:

$$I_n = \frac{\sqrt{2} - u_n}{n-1}.$$

9. Soit $n \geq 3$ un entier. Alors d'après les deux questions précédentes :

$$u_n + u_{n-2} = I_n = \frac{\sqrt{2} - u_n}{n-1}$$

donc $(n-1)u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2} - u_n$ puis $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

10. Soit $n \geq 3$ un entier. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $u_{n-2} \geq u_n$. On en déduit que :

$$nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2} \quad \text{qui donne} \quad (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$$

11. Soit $n \geq 3$ un entier. On sait que $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n$ d'où $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n}{n+1} \leq nu_n$. De plus :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2},$$

d'où $nu_n \leq \sqrt{2} \frac{n}{2n-1}$. On a donc pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \sqrt{2} \frac{n}{2n-1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n}{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \frac{n}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en utilisant l'encadrement précédent, d'après

le théorème d'encadrement, la suite (nu_n) converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice DS4.5

Dans cet exercice, les questions 4 à 6 sont indépendantes des questions 1 à 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 ; on pose $N = 2n$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ; les boules numéro 1 à n sont rouges et les boules numéro $n+1$ à N sont noires. Soit $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$; on effectue p tirages dans cette urne.

Dans les questions 1 à 3, on suppose que les tirages sont effectués simultanément et sans remise.

- Donner le nombre de tirages possibles (on justifiera sa réponse).
- On suppose que $p \leq n$. Soit $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Déterminer le nombre de tirages donnant k boules rouges et $p-k$ boules noires (on justifiera sa réponse).
- En prenant $p = n$ dans les questions 1 et 2, montrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Dans les questions 4 à 6, on suppose que les tirages sont effectués avec remise.

- Donner le nombre de tirages possibles (on justifiera sa réponse).

Dans les questions qui suivent, on suppose que p est pair. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2q$.

5. Donner le nombre de tirages où les tirages impairs donnent une boule rouge et les tirages pairs donnent une boule noire, autrement dit où :
- la première, la troisième, ..., la $p - 1$ -ième boule tirée sont rouges ;
 - la deuxième, la quatrième, ..., la p -ième boule tirée sont noires.
6. Donner le nombre de tirages où apparaissent q boules rouges et q boules noires.

Exercice DS4.6

Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a :

$$(a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=1}^n a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

qui est une somme télescopique et donne :

$$(a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1.$$

2. Si $a = 1$, $a^n - 1 = 0$ n'est pas premier. Supposons dans la suite que $a \neq 1$. Procédons par contraposition. Supposons que $a \neq 2$. On a donc $a - 1 > 1$. Ainsi, avec la question précédente, $a^n - 1 = p \times q$ où $p = a - 1$ et $q = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$ sont des entiers. Ainsi, $p > 1$ est un diviseur de $a^n - 1$ qui n'est donc pas premier. Par contraposition, si $a^n - 1$ est un nombre premier alors $a = 2$.
3. On a $2^{11} = 2 \times 2^5 \times 2^5 = 2 \times 32^2 = 2048$ donc $M_{11} = 2047$. On a successivement :

$$2048 = 23 \times 80 + 208 = 23 \times 89 + 1$$

donc, comme $0 \leq 1 < 23$, 1 est le reste de la division euclidienne de 2048 par 23.

4. Le nombre 11 premier mais avec la question précédente, 23 divise M_{11} donc $\mathcal{P}$ est fausse.
5. On procède par contraposition. Supposons que n n'est pas premier. Montrons que M_n n'est pas premier. Il existe $p, q > 1$ des entiers tel que $n = pq$. Par suite, comme dans la question 1, on a :

$$2^n - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k.$$

Ainsi, comme $\sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k \in \mathbb{N}$ et $2^p - 1 \in \mathbb{N}$, $2^p - 1$ divise M_n . De plus, comme $p > 2$, $2^p - 1 > 2$. Ainsi, M_n admet un diviseur strictement plus grand que 2 : M_n n'est pas premier. Par contraposition, en conclusion, la réciproque de $\mathcal{P}$ est vraie.