

DS4

*Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. La présentation est prise en compte dans l'évaluation : pensez à encadrer vos résultats. **Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,3 et 5 sur une copie et les exercices 2,4 et 6 sur une autre copie.***

Exercice DS4.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer B^2 et B^3 puis, en remarquant que $A = B + 2I_3$, calculer A^n pour tout entier $n \geq 2$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}.$$

Donner le sens de variations de $(u_n)_n$ puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

En déduire, en simplifiant le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus, que $(u_n)_n$ converge.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à cinq. Une course oppose n chevaux numérotés de 1 à n . Donner le nombre de classements des cinq premiers possibles :
- sans que l'ordre importe (par exemple, les classements « 2, 7, 9, 10, 4 » et « 10, 7, 9, 4, 2 » sont considérés comme identiques car ils sont constitués des cinq mêmes chevaux) ;
 - puis en tenant compte de l'ordre.

Exercice DS4.2

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$, et les points A et Ω de coordonnées $(0, 4)$ et $(3, 0)$.

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe du plan.

Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A et $\mathcal{D}_2$ la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par Ω .

2. Déterminer une équation cartésienne pour les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans le repère $\mathcal{R}$.
3. Déterminer le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

On pose $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ tels que :

$$(3x - 4y)(4x + 3y) - 72x + 21y + 83 = 0.$$

4. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, et (x', y') dans le repère $\mathcal{R}'$. Exprimer x et y en fonction de x' et y' .
5. Montrer qu'une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est $x'y' = 1$ et effectuer un dessin de $\mathcal{C}$ où on fera figurer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Exercice DS4.3

Pour tout réel m , on considère le système (S_m) suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= m - 2 \\ -2x + 4y + (m - 2)z &= 0 \\ x + (2 - m)y + 4z &= 2m - 4 \end{cases}$$

Dans les trois premières questions, on suppose que $m = 3$.

1. Donner une matrice A et un vecteur colonne B tels que S_m s'écrive sous forme matricielle « $AX = B$ », où X est le vecteur colonne des inconnues.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse (on écrira A^{-1} sous la forme « fraction $\times$ matrice à coefficients entiers »).
3. En déduire que si $m = 3$, le système (S_m) admet une unique solution et donner cette solution.

Dans les questions qui suivent, on ne suppose plus que $m = 3$.

4. Échelonner le système (S_m) et montrer qu'il est équivalent à un système (S'_m) dont la dernière ligne a la forme suivante :

$$(m^2 - m - 2)z = \dots$$

où les points de suspension sont à remplacer par une expression en fonction de m . En déduire pour quelles valeurs de m ce système admet une solution unique.

5. Quel est l'ensemble des solutions de (S_m) lorsque $m = -1$?
6. Donner précisément l'ensemble des solutions de (S_m) lorsque $m = 2$.
7. On suppose que $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Résoudre (S_m) . (On pourra commencer par simplifier la dernière ligne du système obtenu à la question 4 par $m - 2$).

Exercice DS4.4

On considère la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée, sur l'intervalle $[0, 1]$, de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

2. Calculer u_0 et u_1 .

Dans la suite, on ne cherchera pas à calculer u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$: $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.

On pose désormais, pour tout entier $n \geq 3$: $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
8. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier $n \geq 3$: $I_n = \frac{\sqrt{2} - u_n}{n-1}$.
9. Dédurre des questions 7 et 8 que, pour tout entier $n \geq 3$: $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.
10. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$: $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.
11. Dédurre des questions précédentes que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice DS4.5

Dans cet exercice, les questions 4 à 6 sont indépendantes des questions 1 à 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 ; on pose $N = 2n$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ; les boules numéro 1 à n sont rouges et les boules numéro $n+1$ à N sont noires. Soit $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$; on effectue p tirages dans cette urne.

Dans les questions 1 à 3, on suppose que les tirages sont effectués simultanément et sans remise.

1. Donner le nombre de tirages possibles (on justifiera sa réponse).
2. On suppose que $p \leq n$. Soit $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Déterminer le nombre de tirages donnant k boules rouges et $p-k$ boules noires (on justifiera sa réponse).
3. En prenant $p = n$ dans les questions 1 et 2, montrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Dans les questions 4 à 6, on suppose que les tirages sont effectués avec remise.

4. Donner le nombre de tirages possibles (on justifiera sa réponse).

Dans les questions qui suivent, on suppose que p est pair. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2q$.

5. Donner le nombre de tirages où les tirages impairs donnent une boule rouge et les tirages pairs donnent une boule noire, autrement dit où :
 - la première, la troisième, ..., la $p-1$ -ième boule tirée sont rouges ;
 - la deuxième, la quatrième, ..., la p -ième boule tirée sont noires.
6. Donner le nombre de tirages où apparaissent q boules rouges et q boules noires.

Exercice DS4.6

Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier, en justifiant :

$$(a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

2. Montrer, avec la question précédente que si $a^n - 1$ est un nombre premier alors $a = 2$.

On pose, dans la suite, $M_n = 2^n - 1$.

3. Calculer M_{11} ainsi que le reste de la division euclidienne de 2048 par 23.

On considère la proposition $\mathcal{P}$: « Si n est premier alors M_n est premier ».

4. La proposition $\mathcal{P}$ est-elle vraie ? On justifiera sa réponse.
5. Montrer que la réciproque de $\mathcal{P}$ est vraie.