

Proposition de corrigé du DS3

Exercice DS3.1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a, en faisant une décomposition en éléments simples et un changement d'indice (c'est une somme télescopique) :

$$u_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Comme $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, par somme, (u_n) converge vers 1.

2. Comme $-\exp$ est une primitive de $-\exp$ sur $\mathbb{R}$, la solution du problème posé est unique et est de la forme

$$y : x \mapsto C \exp(-(-\exp(x)))$$

où C est une constante vérifiant $e = y(0) = Ce^0 = C$ c'est-à-dire $C = 1$. En conclusion, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = e$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) - e^x y(x) = 0$$

donnée par l'expression $y : x \mapsto e^{e^x}$.

3. On a les équivalences, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = -1 \iff (-z)^3 = 1 \iff -z \in \{\exp(2ik\pi/3) \mid k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\} \iff -z \in \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^3 = -1$ est

$$\left\{ e^{i\pi}, e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Exercice DS3.2

Exercice DS3.3

Exercice DS3.4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les quantités w_n et v_n sont strictement positives, on a alors :

$$\ln v_n = \ln \left((n!)^{\frac{1}{n}} \right) + \ln \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \ln n! - \ln n \quad \text{et} \quad \ln w_n = \ln n^n + \ln \left(\frac{1}{n!} \right) = n \ln n - \ln n!$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : n \ln v_n = \ln w_n$.

Étude de (w_n)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme w_n n'est jamais nul, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \times \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k,$$

mais comme chacun des termes de cette somme est positif, on en déduit :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \times \frac{1}{n} = 1 + n \times \frac{1}{n} = 2.$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

4. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- Initialisation. On a $w_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2$, ce qui démontre la propriété au rang 2.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que $w_n \geq 2^{n-1}$. On peut alors écrire

$$w_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{w_n} \times w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times w_n.$$

Et comme on a établi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, on en déduit en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$w_{n+1} \geq 2 \times 2^{n-1} \geq 2^n$$

ce qui démontre la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $w_n \geq 2^{n-1}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = +\infty$, par l'inégalité précédente, on en déduit que la suite (w_n) tend vers $+\infty$.

Étude de (v_n)

5. On considère dans un premier temps la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto x - \ln(1 + x)$. Celle-ci est dérivable en tant que différence et composée de fonctions dérivables, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. La fonction f est donc croissante, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq f(0) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \ln(1 + x) \geq 0$$

d'où la première inégalité. Pour démontrer la seconde, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto f(x) - \frac{x^2}{2}$. Celle-ci est à nouveau dérivable en tant que différence de fonctions dérivables, et on

a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = f'(x) - x = \frac{x}{1+x} - x = \frac{-x^2}{1+x}$, qui est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc décroissante d'où la seconde inégalité de façon analogue au cas précédent.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, en prenant $x = 1/n$ dans l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\leq \frac{1}{2n^2} \iff 0 \leq 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n} \\ &\iff 0 \leq 1 - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \leq \frac{1}{2n} \\ &\iff 0 \leq 1 + \ln\left(\frac{w_n}{w_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2n} \iff 0 \leq 1 + \ln w_n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq 1 + \ln w_n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on vient de démontrer la relation suivante :

$$0 \leq 1 + \ln w_k - \ln w_{k+1} \leq \frac{1}{2k}.$$

En sommant ces inégalités membre-à-membre, on obtient successivement :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (1 + \ln w_k - \ln w_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \quad \text{puis} \quad 0 \leq \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n (\ln w_k - \ln w_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

Or on a $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et on reconnaît une somme télescopique ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\ln w_k - \ln w_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n \ln w_k - \sum_{k=1}^n \ln w_{k+1} \\ &= \left(\ln w_1 + \sum_{k=2}^n \ln w_k \right) - \left(\sum_{k=2}^n \ln w_k + \ln w_{n+1} \right) = \ln w_1 - \ln w_{n+1} \end{aligned}$$

et comme $w_1 = 1$, on en déduit le résultat. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

8. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. On a, pour décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $x \in [k-1, k]$,

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^k \frac{dx}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \iff \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

En conclusion, pour tout entier $k \geq 2$: $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut à nouveau sommer ces inégalités membre-à-membre, ce qui donne :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$

Il reste enfin à ajouter 1 à chacun des deux membres pour obtenir le résultat pour tous les entiers $n \geq 2$, et à remarquer que l'inégalité recherchée est également vraie pour $n = 1$. En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va utiliser l'inégalité de la question 7. En utilisant celle démontrée à la question précédente, on en déduit :

$$0 \leq n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2} (1 + \ln n)$$

Or $\ln w_{n+1} = -(n+1) \ln v_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq n + (n+1) \ln v_{n+1} \leq \frac{1}{2} (1 + \ln n) \\ \iff 0 &\leq \frac{n}{n+1} + \ln v_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)} (1 + \ln n) \iff 0 \leq 1 - \frac{1}{n+1} + \ln v_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)} (1 + \ln n) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 + \ln v_{n+1} \leq \frac{3}{2(n+1)} + \frac{\ln n}{2(n+1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1 + \ln(v_{n+1}) = \ln e + \ln v_{n+1} = \ln(ev_{n+1})$. Puisque $x \mapsto e^x$ est croissante, on peut appliquer à cette fonction à l'encadrement précédent, ce qui donne :

$$\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq ev_{n+1} \leq \exp\left(\frac{3}{2(n+1)} + \frac{\ln n}{2(n+1)}\right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2(n+1)} + \frac{\ln n}{2(n+1)} = 0$. Par théorème d'encadrement, (ev_n) est convergente et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ev_{n+1} = 1 \text{ ce qui donne } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{e}.$$

Exercice DS3.5

- On a $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$, ensemble qui possède 8 éléments.
- Pour tout $x \in X$, on a $x \in Y$ et $x \in Z$ donc $x \in Y \cap Z$ ainsi que $x \in Y \cup Z$. En conclusion, $X \subset (Y \cap Z)$ et $X \subset (Y \cup Z)$.
- On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie (P_1) , (P_2) , (P_3) , (P_4) . Par (P_1) , comme $\mathcal{F} \neq \emptyset$, il existe un sous ensemble de A de E tel que $A \in \mathcal{F}$. On a $A \subset E$ donc, par (P_3) , $E \in \mathcal{F}$.

En conclusion, si $\mathcal{F}$ vérifie (P_1) , (P_2) , (P_3) , (P_4) alors $E \in \mathcal{F}$.

- Dans cette question, $\mathcal{F}$ vérifie (P_1) , (P_2) et (P_3) . Procédons par double implication pour montrer que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (P_4) si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.

On suppose que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. Dans ce cas, comme $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, alors $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (P_4) .

On suppose que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (P_4) . Montrons que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. On sait déjà, par définition, qu'on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. Il reste à montrer l'autre inclusion. Comme $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (P_4) , $\emptyset \in \mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $\emptyset \subset A$ donc, par (P_3) , $A \in \mathcal{F}$. Ainsi, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.

En conclusion, $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (P_4) si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.

- On va montrer successivement que $\mathcal{G}$ vérifie (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4) .

Montrons que $\mathcal{G}$ vérifie (P_1) . Comme $E \subset E$ et que $A \subset E$, $E \in \mathcal{G}$ donc $\mathcal{G}$ vérifie (P_1) .

Montrons que $\mathcal{G}$ vérifie (P_2) . Soit $X, Y \in \mathcal{G}$. On a $A \subset X$ et $A \subset Y$ donc, par la question 2, $A \subset X \cap Y$. Ainsi, $\mathcal{G}$ vérifie (P_2) .

Montrons que $\mathcal{G}$ vérifie (P_3) . Soit $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \subset X$ donc $A \subset Y$. Ainsi $Y \in \mathcal{G}$. Par suite, $\mathcal{G}$ vérifie (P_3) .

Montrons que $\mathcal{G}$ vérifie (P_4) . On a $\emptyset \notin \mathcal{G}$ car sinon, on aurait $A \subset \emptyset$ ce qui est faux car sinon on aurait $A = \emptyset$. Ainsi $\mathcal{G}$ vérifie (P_4) .

En conclusion, $\mathcal{G} = \{X \subset E \mid A \subset X\}$ est un filtre sur E .