

DS3

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. La présentation est prise en compte dans l'évaluation : pensez à encadrer vos résultats. Vous séparerez, dans vos copies, A METTRE

Exercice DS3.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n , définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ par :

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

On commencera par simplifier l'expression précédente.

2. Déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = e$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) - e^x y(x) = 0.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^3 = -1$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice DS3.2

Dans cet exercice, on fixe un réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = 2n + 1$, et l'on s'intéresse à l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^N = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \quad (\text{E})$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. Montrer que : $\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} = e^{2i\alpha}$.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = e^{2i(\alpha+k\pi)/N}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tel que

$$i(u_k + 1)z = u_k - 1.$$

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k \neq -1$. On pourra raisonner par l'absurde en montrant que, si $u_k = -1$, alors α est congru à $\pi/2$ modulo π .
4. Montrer que pour tout $(k, k') \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2$ tel que $k \neq k'$,

$$\tan\left(\frac{\alpha + k\pi}{N}\right) \neq \tan\left(\frac{\alpha + k'\pi}{N}\right).$$

5. Montrer que, pour tout réel θ ,

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) et préciser le nombre de solutions.

Exercice DS3.3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)^2 = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

On considère désormais l'équation différentielle suivante dont la fonction inconnue est notée y et la variable x :

$$y'' + \frac{2 \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} y' + y = 0 \quad (\text{E})$$

Dans la suite de l'exercice, on cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (on ne s'intéresse pas aux éventuelles solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}$).

Dans les questions qui suivent, on se donne une fonction y définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on pose $z(x) = y'(x) + f(x)y(x)$.

4. Justifier que z est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer z' .
5. Pour tout réel x , exprimer $z'(x) + f(x)z(x)$ en fonction de y et de ses dérivées. En déduire que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$z' + f(x)z = 0 \quad (\text{E}')$$

6. Montrer à l'aide de la question précédente que y est solution de (E) si et seulement si il existe une constante réelle λ telle que y soit solution de l'équation différentielle d'ordre 1 (E_λ) suivante :

$$y' + f(x)y = \frac{\lambda}{\operatorname{sh} x} \quad (\text{E}_\lambda)$$

7. Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation différentielle (E_λ) . En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice DS3.4

On étudie dans cet exercice les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

1. Donner une relation simple entre $\ln w_n$ et $\ln v_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Étude de (w_n)

2. Montrer que pour tout n entier non nul on a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).
4. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, alors $w_n \geq 2^{n-1}$. On pourra effectuer une récurrence à l'aide de la question 2. En déduire que la suite (w_n) est divergente et déterminer sa limite.

Étude de (v_n)

5. Montrer que $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout réel $x \geq 0$.
6. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq 1 + \ln w_n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

7. Démontrer pour tout entier $n \geq 1$ la relation : $0 \leq n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$.
8. Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1).$$

On pourra écrire le terme de droite comme une intégrale. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

9. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq 1 + \ln v_{n+1} \leq \frac{3}{2(n+1)} + \frac{\ln n}{2(n+1)}.$$

En déduire que la suite (v_n) converge et donner sa limite.

Exercice DS3.5

On rappelle que si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (c'est-à-dire des sous-ensembles) de E .

1. On considère $F = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$. Déterminer $\mathcal{P}(F)$ ainsi que son nombre d'éléments.

Dans la suite, on considère E un ensemble quelconque.

2. Soit X, Y, Z des sous-ensembles de E . On suppose que $X \subset Y$ et $X \subset Z$. A-t-on $X \subset (Y \cap Z)$? On justifiera sa réponse. A-t-on $X \subset (Y \cup Z)$? On justifiera sa réponse.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. On note également dans la suite, $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$ les propriétés :

- $(P_1) : \mathcal{F} \neq \emptyset$;
- $(P_2) : \forall X, Y \in \mathcal{F}, \quad X \cap Y \in \mathcal{F}$;
- $(P_3) : \forall X \in \mathcal{F}, \quad \forall Y \in \mathcal{P}(E), \quad (X \subset Y \implies Y \in \mathcal{F})$;
- $(P_4) : \emptyset \notin \mathcal{F}$.

3. Montrer que si $\mathcal{F}$ vérifie $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$ alors $E \in \mathcal{F}$.

4. On suppose que $\mathcal{F}$ vérifie $(P_1), (P_2)$ et (P_3) . Montrer que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas la propriété (P_4) si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.

Lorsque $\mathcal{F}$ vérifie $(P_1), (P_2), (P_3)$ et (P_4) , on dit que $\mathcal{F}$ est un **filtre** sur E .

Soit A un sous-ensemble de E **non vide**.

5. Montrer que $\mathcal{G} = \{X \subset E \mid A \subset X\}$ est un filtre sur E .