

Proposition de corrigé du DS2

Exercice DS2.1

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cos(2x) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos^2(2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(4x))\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sin^2 x \cos(2x) = -\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}}$

On en déduit, sachant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \cos(\alpha x)$ admet $x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$ comme primitive :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos(2x) dx &= \int_0^{\pi/4} \left(-\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{16} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{x}{4} \right]_{x=0}^{\pi/4} \\ &= -\frac{\sin \pi - \sin 0}{16} + \frac{\sin(\pi/2) - \sin 0}{4} - \frac{\pi/4 - 0}{4}\end{aligned}$$

soit $\boxed{\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos(2x) dx = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}}$

2. (a) C'est du cours.

- (b) La fonction tangente réalise une bijection de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan' x = 1 + \tan^2 x.$$

En particulier, la dérivée de la tangente ne s'annule pas sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. D'après le théorème de dérivation d'une bijection réciproque, l'arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}' x &= \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan} x)} \\ &= \frac{1}{1 + (\tan(\operatorname{Arctan} x))^2}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1 + x^2}}$

3. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}i - e^{i\theta} &= e^{i\pi/2} - e^{i\theta} \\ &= e^{i(\pi/2+\theta)/2} \cdot \left(e^{i(\pi/2-\theta)/2} - e^{-i(\pi/2-\theta)/2} \right) \\ &= e^{i(\pi+2\theta)/4} \cdot 2i \sin \left(\frac{\pi - 2\theta}{4} \right) \\ &= e^{i(\pi+2\theta)/4} \cdot 2e^{i\pi/2} \sin \left(\frac{\pi - 2\theta}{4} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi - 2\theta}{4} \right) \cdot e^{i(3\pi+2\theta)/4}.\end{aligned}$$

Il faut alors distinguer selon le signe du sinus dans l'expression ci-dessus. On remarque pour cela que, lorsque $\theta \in [0, \pi]$, $\frac{\pi - 2\theta}{4}$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et s'annule exactement pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout autre $\theta \in [0, \pi]$,

$$\frac{\pi - 2\theta}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\iff \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \frac{\pi - 2\theta}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \iff \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Sachant que le sinus est strictement négatif sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et strictement positif sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors conclure :

— si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on écrit

$$z = -2 \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) \cdot \left(-e^{i(3\pi + 2\theta)/4}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) \cdot e^{i(-\pi + 2\theta)/4}$$

et le réel $-2 \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$ est strictement positif, donc :

$$\boxed{\text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, |z| = -2 \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) \text{ et } \arg z \equiv \frac{-\pi + 2\theta}{4}[2\pi];}$$

— si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $z = 0$: $\boxed{\text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, |z| = 0 \text{ et } \arg z \text{ n'est pas défini}};$

— si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, le sinus dans l'expression précédente de z étant positif, on a :

$$\boxed{\text{si } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right], |z| = 2 \sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) \text{ et } \arg z \equiv \frac{3\pi + 2\theta}{4}[2\pi].}$$

Exercice DS2.2

- (a) La fonction y est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'exponentielle est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit par composition que :

$$\boxed{z \text{ est définie et deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- (b) On a pour tout réel x : $y(e^{\ln x}) = y(x) = z(\ln x)$ puis, par dérivation de fonctions composées :

$$z'(x) = \ln'(x) \times z'(\ln x) = \frac{z'(\ln x)}{x}$$

$$\text{et } z''(x) = \frac{\frac{d}{dx}(z'(\ln x)) \cdot x - z'(\ln x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot z''(\ln x) \cdot x - z'(\ln x)}{x^2} = \frac{z''(\ln x) - z'(\ln x)}{x^2}$$

En fin de compte, pour tout réel x ,

$$\boxed{\begin{aligned} y'(x) &= \frac{z'(\ln x)}{x} \\ \text{et } y''(x) &= \frac{1}{x^2} (z''(\ln x) - z'(\ln x)). \end{aligned}}$$

- (c) Puisque l'exponentielle est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) est équivalente à celle obtenue en remplaçant la variable x par e^t : plus précisément, on a l'équivalence :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = x^2 + 1\right) \iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, (e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = e^{2t} + 1\right).$$

On exprime alors le membre de droite de la deuxième égalité en fonction de z et t : pour tout réel t ,

$$\begin{aligned}(e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(t) + 4y(e^t) &= e^{2t} \cdot \frac{1}{(e^t)^2} (z''(t) - z'(t)) - 3e^t \cdot \frac{z'(t)}{e^t} + 4z(t) \\ &= z''(t) - z'(t) - 3z'(t) + 4z(t) \\ &= z''(t) - 4z'(t) + 4z(t).\end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$y \text{ est solution de (E) si et seulement si } z \text{ est solution de : } z'' - 4z' + 4z = e^{2t} + 1.$$

2. L'équation caractéristique de (E') d'inconnue r est : $r^2 - 4r + 4 = 0$, qui admet une unique racine double $r_0 = 2$. La solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$z_h : t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{2t}$$

où λ et μ sont des constantes réelles. Pour déterminer une solution particulière z_P de (E'), on utilise le principe de superposition et l'on cherche successivement :

- une solution particulière z_1 de $z'' - 4z' + 4z = 1$: on cherche une solution particulière constante, et l'on trouve que $z_1 = \frac{1}{4}$ convient ;
- une solution particulière z_2 de $z'' - 4z' + 4z = e^{2t}$: le second membre étant $t \mapsto e^{r_0 t}$, où r_0 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche z_2 sous la forme $z_2(t) = K t^2 e^{2t}$. On calcule alors successivement

$$\begin{aligned}z_2'(t) &= K \cdot 2t \cdot e^{2t} + K \cdot t^2 \cdot 2e^t \\ &= 2Kt e^{2t} + 2z_2(t) \\ \text{et } z_2''(t) &= 2K e^{2t} + 2Kt \cdot 2e^{2t} + 2z_2'(t) \\ &= 2K e^{2t} + 4Kt e^{2t} + 2 \cdot (2Kt e^{2t} + 2z_2(t)) \\ &= 2K e^{2t} + 8Kt e^{2t} + 4z_2(t).\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation que l'on cherche, les termes en $t e^{2t}$ et en $z_2(t)$ partent, et il reste :

$$z_2'' - 4z_2' + 4z_2 = e^{2t} \iff \forall t \in \mathbb{R}, 2K e^{2t} = e^{2t} \iff K = \frac{1}{2}.$$

La fonction z_2 est donc donnée par $z_2'(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$, et en fin de compte, la solution particulière est :

$$z_P : t \mapsto \frac{1}{4} + \frac{t^2 e^{2t}}{2} = \frac{1 + 2t^2 e^{2t}}{4}.$$

Les solutions de (E') sont exactement les $z_h + z_P$ avec z_h solution de l'équation homogène associée. On conclut :

$$\text{Les solutions de (E')} \text{ sont les fonctions } t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{2t} + \frac{1 + 2t^2 e^{2t}}{4}, \text{ avec } \lambda, \mu \text{ constantes réelles.}$$

3. D'après la question 1.3, les fonctions y solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto z(\ln x) \quad \text{avec } z \text{ solution de (E')}.$$

Si z est une solution de (E'), on calcule alors, pour tout réel x strictement positif et en repartant de la forme trouvée à la question 2,

$$\begin{aligned}z(\ln x) &= (\lambda \ln x + \mu) e^{2 \ln x} + \frac{1 + 2(\ln x)^2 e^{2 \ln x}}{4} \\ &= (\lambda \ln x + \mu) x^2 + \frac{1 + 2(x \ln x)^2}{4}\end{aligned}$$

où λ et μ sont deux constantes réelles. En fin de compte,

les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\lambda \ln x + \mu)x^2 + \frac{1 + 2(x \ln x)^2}{4}$, avec λ, μ constantes.

Exercice DS2.3

1. (a) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 |tu - (1 - t)|^2 &= |t(a + ib) - (1 - t)|^2 \\
 &= |ta - (1 - t) + itb|^2 \\
 &= \left(ta - (1 - t) \right)^2 + t^2 b^2 \\
 &= t^2 a^2 - 2at(1 - t) + (1 - t)^2 + t^2 b^2 \\
 &= t^2 a^2 - 2at + 2at^2 + 1 - 2t + t^2 + t^2 b^2 \\
 &= (a^2 + b^2 + 2a + 1)t^2 - (2a + 2)t + 1.
 \end{aligned}$$

Sachant que $|u|^2 = a^2 + b^2 = 1$, on peut simplifier dans l'égalité précédente pour obtenir :

$$|tu - (1 - t)|^2 = (2a + 2)t^2 - (2a + 2)t + 1.$$

- (b) Notons A, B, C les coefficients du trinôme du second degré précédent. Puisque u est de module 1, sa partie réelle appartient à $[-1, 1]$, et ne peut valoir -1 car si c'était le cas on aurait $u = -1$ ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi,

$$a > -1 \quad \text{donc} \quad 2a + 2 > 0.$$

Le coefficient dominant du trinôme du second degré est donc strictement positif : ce trinôme admet donc un unique minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en

$$-\frac{B}{2A} = \frac{2a + 2}{2(2a + 2)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $t \mapsto |tu - (1 - t)|^2$ admet un unique minimum atteint pour $t = \frac{1}{2}$, qui est donné par

$$\left| \frac{1}{2}u - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right|^2 = \left| \frac{u - 1}{2} \right|^2.$$

Par croissance stricte de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on peut conclure :

$$|tu + (1 - t)| \geq \left| \frac{u - 1}{2} \right| \text{ et il y a égalité si et seulement si } t = \frac{1}{2}.$$

2. (a) On a : $OA = |z_A| = |u| = 1$ et $OB = |z_B| = |-1| = 1$. Le point O est donc équidistant de A et de B : ainsi,

$$O \text{ appartient à la médiatrice de } [AB].$$

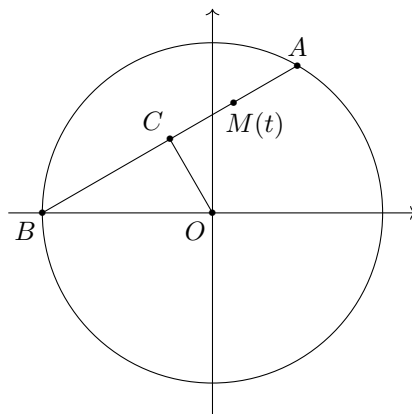
Pour tout réel t , on a de plus

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{z_{AM(t)}} &= z_{M(t)} - z_A \\
 &= tu - (1 - t) - u \\
 &= (t - 1)u - (1 - t) \\
 &= (1 - t)((-1) - u) \\
 &= (1 - t)\overrightarrow{z_{AB}}.
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM(t)}$ et AB sont donc colinéaires pour tout t :

$$\text{pour tout réel } t, M(t) \text{ appartient à la droite } (AB).$$

- (b) On peut représenter la situation comme suit.



Pour tout réel t , puisque O est la médiatrice de $[AB]$ et C le milieu de $[AB]$, la droite (OC) coupe $[AB]$ en C et lui est perpendiculaire. De plus, $M(t)$ appartient à la droite (AB) . Le triangle $(M(t), O, C)$ est donc rectangle en C , et d'après le théorème de Pythagore :

$$OM(t)^2 = OC^2 + CM(t)^2.$$

De plus, $\overrightarrow{CM(t)} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM(t)}$ avec $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et, d'après le calcul effectué à la question précédente

$$\overrightarrow{AM(t)} = (1-t)\overrightarrow{AB}.$$

Il vient : $\overrightarrow{CM(t)} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2} - t\right)\overrightarrow{AB}$, puis en reportant :

$$OM(t)^2 = OC^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 AB^2$$

$$\text{donc } OM(t) = \sqrt{OC^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 AB^2}.$$

(c) Puisqu'un carré est toujours positif, on a :

$$OC^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 AB^2 \geq OC^2 \text{ avec égalité si et seulement si } t = \frac{1}{2}.$$

Par croissance stricte de la racine carrée, et d'après la question précédente, on en déduit que, pour tout réel t ,

$$OM(t) \geq OC \text{ avec égalité si et seulement si } t = \frac{1}{2}.$$

Sachant que M a pour affixe $tu - (1-t)$ et que C a pour affixe $\frac{u-1}{2}$, on obtient le résultat voulu :

$$|tu - (1-t)| \geq \left| \frac{u-1}{2} \right| \text{ avec égalité si et seulement si } t = \frac{1}{2}.$$

Exercice DS2.4

1. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$t \mapsto \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}.$$

donc

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3}.$$

2. On pose, pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} f'(t) = \sqrt{t} \\ g(t) = 1 - t \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \\ g'(t) = -1 \end{cases}.$$

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc, par la formule d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)\sqrt{t} \, dt = \underbrace{\left[(1-t)\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (-1)\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{2}{3} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{2}{3} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

donc $\boxed{I_1 = \frac{4}{15}}.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} \, dt - \int_0^1 (1-t)^{n+1} \sqrt{t} \, dt = \int_0^1 (1-t)^n (1 - (1-t)) \sqrt{t} \, dt = \int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{3}{2}} \, dt$$

et on a, par une intégration par parties analogue au cas précédent

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} \sqrt{t} \, dt = \underbrace{\left[(1-t)^{n+1} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{3}{2}(n+1) \int_0^1 (1-t)^n t^{\frac{3}{2}} \, dt.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} (I_n - I_{n+1}).$$

On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} I_n - \frac{2(n+1)}{3} I_{n+1}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n}.$$

4. On a $I_2 = \frac{4}{7} I_1$ donc $\boxed{I_2 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}}.$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{(2(n+1)+3)! \times I_{n+1}}{(n+2) \times ((n+1)!)^2} = \frac{(2n+5)!}{(n+2) \times ((n+1)!)^2} \times \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n = \frac{(2n+4)!}{(n+2)(n+1)^2 (n!)^2} I_n$$

donc $\alpha_{n+1} = \frac{(2n+4) \times 2}{(n+2)(n+1)} \frac{(2n+3)! \times I_n}{(n+1) \times (n!)^2} = 4\alpha_n$. Finalement, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ est géométrique}}.$

6. On a $\alpha_0 = \frac{3!}{1 \times 1} I_0 = \frac{6 \times 2}{3} = 4$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = 4^{n+1}$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(n+1)n!4^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

Exercice DS2.5

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points M, N, P d'affixe respectifs z, z^2 et $\frac{1}{z}$.

1. On a les équivalences pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = z \iff z(z-1) = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z = 1$$

et, lorsque $z \neq 0$:

$$z = \frac{1}{z} \iff \frac{z^2 - 1}{z} = 0 \iff (z-1)(z+1) = 0 \iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $\boxed{z \in \mathbb{C} : z = z^2 \text{ est } \{0, 1\}}$ et l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $\boxed{z \in \mathbb{C} : z = 1/z \text{ est } \{1, -1\}}$. Deux points étant égaux si et seulement leurs affixes sont égaux, $\boxed{\text{l'ensemble des complexes } z \text{ tels que } M \neq N \text{ et } M \neq P \text{ est } \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}}$.

2. Les points M, N, P sont alignés si et seulement si leur affixes vérifient

$$\frac{z - \frac{1}{z}}{z - z^2} \in \mathbb{R} \iff \frac{z^2 - 1}{z^2 - z^3} \in \mathbb{R} \iff \frac{(z+1)(z-1)}{z^2(1-z)} \in \mathbb{R} \iff -\frac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R} \iff \frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R}.$$

Finalement, $\boxed{M, N \text{ et } P \text{ sont alignés si et seulement si } \frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R}}$.

3. On a les équivalences :

$$\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff \frac{1+z}{z^2} = \overline{\frac{1+z}{z^2}} \iff \frac{1+\bar{z}}{\bar{z}^2} = \frac{1+z}{z^2} \iff \bar{z}^2(z+1) = z^2(\bar{z}+1).$$

ce qui donne

$$\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff \bar{z}^2(z+1) = z^2(\bar{z}+1) \iff \bar{z}|z|^2 + \bar{z}^2 - z|z|^2 - z^2 = 0 \iff (\bar{z}-z)(|z|^2 + \bar{z}+z) = 0.$$

En conclusion :

$$\boxed{\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff (\bar{z}-z)(|z|^2 + \bar{z}+z) = 0}.$$

4. Avec l'équivalence précédente, les points M, N et P sont alignés si et seulement si $z = \bar{z}$ ou $|z+1|^2 = 1$ ce qui signifie que M, N et P sont alignés si et seulement si M est sur l'axe des abscisses ou sur le cercle de centre Ω et de coordonnées $(-1, 0)$ et de rayon 1 lorsque M n'est pas d'affixe 1, 0 ou -1 . Les cas où M est d'affixe 1 ou -1 correspond à des cas où M et P sont confondus donc alignés. En conclusion, M, N et P sont alignés si et seulement si M est sur l'axe des abscisses mais pas à l'origine ou sur le cercle de centre Ω et de coordonnées $(-1, 0)$ et de rayon 1.

Exercice DS2.6

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $\sqrt{1-x^2}$ est bien défini si et seulement si $1-x^2$ est positif ou nul. Or, on a les équivalences suivantes :

$$1-x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff x \in [-1, 1].$$

Ainsi, $\boxed{\sqrt{1-x^2} \text{ est bien défini si et seulement si } x \in [-1, 1]}$. Maintenant, pour un tel x , d'une part, $\sqrt{1-x^2}$ est positif ou nul car c'est une racine carrée, et d'autre part

$$1-x^2 \leq 1, \quad \text{donc} \quad \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On obtient en fin de compte :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1}.$$

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors d'une part, $(a-b)^2$ est positif ou nul, ce qui donne les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2 \\ \iff 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \iff 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ \iff ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a de la même manière :

$$\begin{aligned} & -(a+b)^2 \leq 0 \\ \iff & -a^2 - 2ab - b^2 \leq 0 \\ \iff & -(a^2 + b^2) \leq 2ab \\ \iff & -\frac{a^2 + b^2}{2} \leq ab. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien la double inégalité cherchée :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, -\frac{a^2 + b^2}{2} \leq ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}}$$

- (c) Si $x \notin [-1, 1]$, alors ni $\text{Arcsin } x$ ni $\sqrt{1-x^2}$ ne sont définis. Reste à montrer réciproquement que $\text{Arcsin } x$ et $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ sont tous deux définis si $x \in [-1, 1]$. C'est le cas pour $\text{Arcsin } x$ puisque $[-1, 1]$ est l'ensemble de définition de la fonction Arcsin . D'autre part, pour tout $x \in [-1, 1]$, la question 2 appliquée en posant

$$a = x \quad \text{et} \quad b = \sqrt{1-x^2}$$

donne les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & -\frac{x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2}{2} \leq x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2}{2} \\ \iff & -\frac{x^2 + 1 - x^2}{2} \leq x\sqrt{1-x^2} \leq \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} \\ \iff & -1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]$, qui est l'ensemble de définition d' Arcsin , et achève la démonstration :

$$\boxed{\text{les deux membres de (E) sont définis si et seulement si } x \in [-1, 1].}$$

2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a d'après la formule de duplication :

$$\sin(2 \text{Arcsin } x) = 2 \sin(\text{Arcsin } x) \cos(\text{Arcsin } x).$$

En utilisant les formules du cours pour $\sin(\text{Arcsin } x)$ et $\cos(\text{Arcsin } x)$, il vient immédiatement

$$\boxed{\sin(2 \text{Arcsin } x) = 2x\sqrt{1-x^2}.}$$

3. — On sait que, si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\text{Arcsin } y) = y$.

- Si $y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, alors $y + \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\text{Arcsin}(\sin(y + \pi)) = y + \pi$$

et l'on a alors en utilisant la parité de l'arcsinus :

$$\text{Arcsin}(\sin y) = \text{Arcsin}(-\sin(y + \pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(y + \pi)) = -(y + \pi).$$

- Si $y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $y - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et par les mêmes propriétés :

$$\text{Arcsin}(\sin y) = \text{Arcsin}(-\sin(y - \pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(y - \pi)) = -y + \pi.$$

En fin de compte :

$$\boxed{\text{Arcsin}(\sin y) = \begin{cases} -y - \pi & \text{si } y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \\ y & \text{si } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ -y + \pi & \text{si } y \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}}$$

4. Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $y = 2 \operatorname{Arcsin} x$. D'après la question précédente, on a

$$\sin y = 2x\sqrt{1-x^2}$$

et l'équation (E) équivaut à « $y = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ », autrement dit :

$$(E) \iff \operatorname{Arcsin}(\sin y) = y.$$

La question précédente montre que $\operatorname{Arcsin}(\sin y) = y$ si et seulement si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, autrement dit :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de (E)} &\iff -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Le sinus étant une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$, on a l'équivalence

$$-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{4} \iff \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq x \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ce qui prouve le résultat demandé :

l'ensemble des solutions de (E) est l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Exercice DS2.7

On rappelle la notation : si f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ le problème (E) est, pour tout réel x :

$$f(ax+b) = f(x). \quad (E)$$

- Si f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, celle-ci est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(y)$ ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = ax + b$, $f(ax + b) = f(x)$. Ainsi, les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sur des éléments de $\mathcal{E}$.
- Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.
Pour $n = 0$, on a $f(u_0) = f(x)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$. On a

$$f(u_{n+1}) = f(au_n + b) = f(u_n) = f(u_0) = f(x)$$

ce qui achève la récurrence.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + b - \frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a(u_n - r) = av_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a^n v_0$ ce qui donne

$$u_n - r = a^n(u_0 - r).$$

En conclusion,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - r) + r.$

Comme $|a| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ donc, par somme, (u_n) est convergente et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \times (u_0 - r) + r = r.$

4. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et que la suite (u_n) est convergente de limite r , on a

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(r) = f\left(\frac{b}{1-a}\right).$$

Posons $C = f(r)$. On a montré dans les question précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(r) = C$$

donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

5. Lorsque $a = 1$ et $b = 0$, (E) est l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de condition).
6. Lorsque $|a| < 1$, ceci est traité précédemment. Supposons que $|a| > 1$. On, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) = f\left(a\frac{1}{a}x - a\frac{b}{a} + b\right) = f(x)$$

donc, en posant $a' = 1/a$ et $b' = -b/a$, on a, $|a'| < 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a'x + b') = f(x)$ donc, avec les questions précédentes, f est constante. Dans tous les cas, f est constante.

7. Lorsque $a = 1$ et $b \neq 0$, les solutions de (E) sont les fonctions définies, continues et b -périodiques sur $\mathbb{R}$ et lorsque $a = -1$, il s'agit directement de la condition de symétrie de la courbe de f . En conclusion :
- (a) lorsque $|a| \neq 1$, (E) est l'ensemble des fonctions constantes ;
 - (b) lorsque $a = 1$ et $b = 0$, (E) est l'ensemble des fonction continues sur $\mathbb{R}$;
 - (c) lorsque $a = 1$ et $b \neq 0$, (E) est l'ensemble des fonction continues et b -périodiques sur $\mathbb{R}$;
 - (d) lorsque $a = -1$, (E) est l'ensemble des fonctions continues dont la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{b}{2}$.