

DS2

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. La présentation est prise en compte dans l'évaluation : pensez à encadrer vos résultats. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,2,3,6 des exercices 4,5,7

Exercice DS2.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Linéariser l'expression $\sin^2 x \cos(2x)$ puis calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \cos(2x) dx$.
2. (a) Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation d'une bijection réciproque.
(b) À partir de la définition de l'arctangente et de la dérivée de la tangente, montrer que l'arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée. Les réponses donnant uniquement la formule finale ne seront pas prises en compte.
3. Soit $\theta \in [0, \pi]$. On pose $z = i - e^{i\theta}$. Donner le module de z et, lorsque cela a un sens, un argument de z . On discutera selon les valeurs de θ .

Exercice DS2.2

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 + 1 \quad (\text{E})$$

où la variable est notée x et l'inconnue est une fonction y définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (on ne s'intéresse pas aux solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ ni aux éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$) et à valeurs réelles.

1. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)$.
(a) Justifier que z est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $y'(x)$ puis $y''(x)$ en fonction de $z'(x)$, $z''(x)$ et x .
(c) En déduire que y est solution de (E) si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante, dont la variable est notée t :

$$z'' - 4z' + 4z = e^{2t} + 1. \quad (\text{E}')$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice DS2.3

Soit u un nombre complexe de module 1 fixé. Le but de l'exercice est de montrer par deux méthodes distinctes que, pour tout réel t ,

$$|tu - (1 - t)| \geq \left| \frac{u - 1}{2} \right| \quad (\text{I})$$

et qu'il y a égalité dans (I) si et seulement si $t = \frac{1}{2}$.

1. *Première méthode.* On note $u = a + ib$ où a, b sont des nombres réels.
(a) Pour tout réel t , écrire l'expression $|tu + (1 - t)|^2$ comme un polynôme de degré 2 (par rapport à la variable t). On simplifiera les coefficients au maximum en tenant compte du fait que $|u| = 1$.
(b) Conclure.
2. *Deuxième méthode.* On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; toutes les affixes seront exprimées dans ce repère.
On note A le point d'affixe u , B le point d'affixe -1 et C le milieu de $[AB]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note de plus $M(t)$ le point d'affixe $tu - (1 - t)$.
(a) Montrer que O appartient à la médiatrice de $[AB]$, et que, pour tout réel t , $M(t)$ appartient à la droite (AB) .

- (b) Faire un dessin. Pour tout réel t , exprimer $OM(t)$ en fonction de OC et de AB .
 (c) Conclure.

Exercice DS2.4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt.$$

1. Calculer I_0 .
2. En effectuant une intégration par parties, calculer I_1 .
3. Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n.$$

On pourra s'inspirer de la question précédente.

4. Calculer I_2 .
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \frac{(2n+3)! \times I_n}{(n+1) \times (n!)^2}.$$

Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

6. Déterminer une formule pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice DS2.5

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points M, N, P d'affixe respectifs z, z^2 et $\frac{1}{z}$.

1. Résoudre successivement les équations $z = z^2, z = \frac{1}{z}$. En déduire l'ensemble des complexes z tels que $M \neq N$ et $M \neq P$. On notera Δ cet ensemble.

On suppose dans toute la suite que $z \in \Delta$.

2. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si

$$\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer que

$$\frac{1+z}{z^2} \in \mathbb{R} \iff (\bar{z} - z)(|z+1|^2 - 1) = 0.$$

4. Caractériser géométriquement l'ensemble des points M tel que M, N, P sont alignés.

Exercice DS2.6

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$2 \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}). \quad (\text{E})$$

1. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble de définition des deux membres de l'équation (E).
 (a) Dire pour quel(s) réel(s) x le réel $\sqrt{1-x^2}$ est bien défini et montrer que pour un tel x ,

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

- (b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$-\frac{a^2+b^2}{2} \leq ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

- (c) À l'aide des deux questions précédentes, justifier que les deux membres de l'équation (E) sont définis si et seulement si $x \in [-1, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(2 \operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
 3. Soit $y \in [-\pi, \pi]$. Simplifier l'expression $\operatorname{Arcsin}(\sin y)$ (on distinguera trois cas selon les valeurs de y).
 4. Montrer que l'équation (E) admet l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ comme ensemble de solutions.
- Indication :* on pourra, étant donné $x \in [-1, 1]$, poser $y = 2 \operatorname{Arcsin} x$ et utiliser les deux questions précédentes.

Exercice DS2.7

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f , définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout réel x :

$$f(ax + b) = f(x). \quad (\text{E})$$

1. Montrer que les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathcal{E}$.

On considère réciproquement une fonction $f \in \mathcal{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = au_n + b$$

et on pose $r = \frac{b}{1-a}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r$$

puis justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite qu'on précisera.

4. Conclure que f est constante.

Dans les questions 5 à 6, on conserve les hypothèses pour l'ensemble $\mathcal{E}$ mais on suppose que $|a| \geq 1$.

5. Déterminer (E) lorsque $a = 1$ et $b = 0$.
6. Si $|a| \neq 1$ et que $f \in \mathcal{E}$ montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = f(x)$ puis conclure avec la partie précédente que f est constante.

On ne suppose plus aucune hypothèse sur a .

7. Déterminer (E) dans tous les cas.