

Proposition de corrigé du DS1

Exercice DS1.1

1. Comme $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, cette fonction est définie lorsque la fonction $\cos$ ne s'annule pas. Ainsi, $\tan$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$. De plus, par parité de $\cos$ et imparité de $\sin$, on a, pour tout $x \in D$:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

2. On a les équivalences, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - 2| < 1 \iff -1 < x - 2 < 1 \iff 1 < x < 3$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1$ est $]1, 3[$.

Exercice DS1.2

1. La fonction f_m est un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc cette fonction est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, lorsque $m = 0$, $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_0 = \mathbb{R}$ et si $m \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathcal{D}_m = \mathbb{R} \setminus \{1/m\}.$$

2. On a

$$f_m(0) = \frac{1}{-1} = -1$$

donc toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ de f_m passent par le point A de coordonnées $(0, -1)$.

3. Lorsque $m = 0$, f_m est définie sur $\mathbb{R}$ et est la fonction $x \mapsto x - 1$: sa limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) est $+\infty$ (respectivement $-\infty$). On suppose dans la suite que $m \neq 0$. On a, pour tout $x \in \mathcal{D}_m \setminus \{0\}$:

$$f_m(x) = \frac{m - 1 + \frac{1}{x}}{m - \frac{1}{x}}$$

donc comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, par opération :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m(x) = \frac{m - 1}{m}.$$

Il reste à examiner les limites à droite et à gauche de f_m en $\frac{1}{m}$. On a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} (m - 1)x + 1 = \frac{2m-1}{m}$ donc on va distinguer quatre cas.

Premier cas : $m < 0$. Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} (m - 1)x + 1 = \frac{2m-1}{m} > 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^+} mx - 1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^-} mx - 1 = 0^+$$

donc, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^+} f_m(x) = -\infty$$

De façon analogue, dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^-} f_m(x) = +\infty$$

Second cas : $0 < m < 1/2$. De façon analogue au cas précédent,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^-} f_m(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^+} f_m(x) = -\infty.$$

Troisième cas : $m > 1/2$. De façon analogue au cas précédent,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^-} f_m(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^+} f_m(x) = +\infty.$$

Quatrième cas : $m = 1/2$. Dans ce cas, pour tout réel $x \neq 2$, $f_m(x) = -1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^-} f_m(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{m})^+} f_m(x) = -1$$

4. Comme quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_m$, f_m est dérivable sur D_m et, pour tout $x \in \mathcal{D}_m$:

$$f'_m(x) = \frac{(m-1)(mx-1) - ((m-1)x+1)m}{(mx-1)^2} = \frac{-2m+1}{(mx-1)^2}.$$

Ainsi, lorsque $m = 0$, la fonction f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, lorsque $m > 1/2$, f_m est strictement décroissante sur $] -\infty, 1/m[$ et sur $]1/m, +\infty[$, lorsque $m < 0$ ou $1/2 > m > 0$, f_m est strictement croissante sur $] -\infty, 1/m[$ et sur $]1/m, +\infty[$ et lorsque $m = 1/2$, f_m est constante (en -1) sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$

5. Soit $x \in \mathcal{D}_m$. On a les équivalences :

$$f_m(x) = 1 \iff (m-1)x+1 = mx-1 \iff -x+1 = -1 \iff x = 2.$$

Ainsi, lorsque $m \neq 1/2$, $2 \in \mathcal{D}_m$ et dans ce cas, 2 est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f_m(x) = 1$ et lorsque $m = 1/2$, cette équation n'a pas de solution.

lorsque $m \neq 1/2$, 2 est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f_m(x) = 1$
et cette équation n'a pas de solution lorsque $m = 1/2$.

Exercice DS1.3

1. On suppose que $b = 0$. On a alors, pour tout réel θ , les équivalences :

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos(3\theta) = 0 &\iff \cos \theta = 0 \text{ ou } \cos(3\theta) = 0 \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } 3\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

On remarque de plus que les réels congrus à $\pi/2$ modulo π sont aussi congrus à $\pi/6$ modulo $\pi/3$: en effet, si $\theta \equiv \pi/2[\pi]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &= \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{3k\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{6} + (3k+1)\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

En conclusion,

lorsque $b = 0$, les solutions de (E) sont les réels θ tels que $\theta \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right]$.
--

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après les formules de linéarisation,

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos(3\theta) &= \frac{1}{2} \left(\cos(\theta + 3\theta) + \cos(\theta - 3\theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(4\theta) + \cos(-2\theta) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(4\theta) + \cos(2\theta) \right) \end{aligned}$$

car le cosinus est une fonction paire. De plus, la formule de duplication donne

$$\cos(4\theta) = \cos(2 \cdot (2\theta)) = 2\cos^2(2\theta) - 1.$$

En reportant dans le calcul précédent, on obtient

$$\cos \theta \cos(3\theta) = \frac{1}{2} (2\cos^2(2\theta) - 1 + \cos(2\theta))$$

soit $\boxed{\cos \theta \cos(3\theta) = \cos^2(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2}}.$

3. La fonction f est un polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto 2x + \frac{1}{2}$$

qui est strictement négative sur l'intervalle $\left] -\infty, -\frac{1}{4} \right]$, nulle en $-\frac{1}{4}$ et strictement positive sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{4}, +\infty \right[$. On a de plus :

— $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ d'après les règles de calcul de limites d'un polynôme ;

$$— f(-1/4) = \frac{1}{4^2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = -\frac{9}{16}.$$

On peut en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-1/4$	$+\infty$
f	$+\infty$	$-9/16$	$+\infty$

Enfin, on calcule :

$$f(-1) = (-1)^2 + \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

pour en déduire le tableau de variations de f sur $[-1, 1]$:

x	-1	$-1/4$	1
f	0	$-9/16$	1

En particulier, $\boxed{f \text{ admet un unique minimum sur } \mathbb{R}, \text{ de valeur } -9/16 \text{ et atteint en } -1/4}.$

4. D'après la question 2, on a pour tout réel θ :

$$\cos^2(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2} = f(\cos(2\theta)).$$

Ainsi, l'équation (E) équivaut à « $f(\cos(2\theta)) = b$ ». On distingue alors deux cas :

— Si $b \in \left[-\frac{9}{16}, 1\right]$, alors d'après le tableau de variations de f et puisque f est continue sur $[-1, 1]$, il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = b$. Puisque $x \in [-1, 1]$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \phi = x$, et en posant $\theta = \phi/2$, on a bien

$$\cos \theta \cos(3\theta) = f(\cos(2\theta)) = f(\cos \phi) = f(x) = b$$

de sorte que θ est solution de (E) : l'équation (E) admet une solution.

— Si $b < -9/16$ ou $b > 1$, montrons que (E) ne peut pas avoir de solution. En effet, pour tout réel θ , $\cos(2\theta) \in [-1, 1]$ donc en posant $x = \cos(2\theta)$, on a d'après le tableau de variations de f :

$$\cos \theta \cos(3\theta) = f(\cos(2\theta)) = f(x) \in \left[-\frac{9}{16}, 1\right]$$

donc $\cos \theta \cos(3\theta) \neq b$, et θ n'est donc pas solution de (E).

En conclusion,

$$\text{l'équation (E) admet au moins une solution si et seulement si } b \in \left[-\frac{9}{16}, 1\right].$$

5. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ les équivalences :

$$f(x) = 1 \iff x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 1 \iff x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

dont les solutions notées x_1 et x_2 sont

$$x_1 = \frac{-1/2 - 5/2}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1/2 + 5/2}{2} = 1.$$

Ainsi, les réels tels que $f(x) = 1$ sont -3 et 1 .

- (b) D'après les questions 2 et 5.(a), on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ les équivalences :

$$\cos \theta \cos(3\theta) = 1 \iff f(\cos(2\theta)) = 1 \iff \cos(2\theta) = -3 \text{ ou } \cos(2\theta) = 1.$$

La condition « $\cos(2\theta) = -3$ » est impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 . De plus,

$$\cos(2\theta) = 1 \iff 2\theta \equiv 0[2\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi].$$

On peut alors conclure :

$$\text{Lorsque } b = 1, \text{ les solutions de (E) sont les réels congrus à } 0 \text{ modulo } \pi.$$

Exercice DS1.4

On considère l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan^2(3x) - 2\sqrt{2}\tan(3x) + 1 = 0. \quad (\text{E})$$

1. L'équation (E) a un sens lorsque $x \in \mathbb{R}$ vérifie

$$3x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff x \not\equiv \frac{\pi}{6} [\pi/3].$$

En conclusion, (E) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. L'équation, d'inconnue $X \in \mathbb{R} : X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$ est une équation du second degré qui a pour discriminant 4 donc ses solutions sont $1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 1$.
3. Pour tout réel x vérifiant $x \not\equiv \frac{\pi}{4} [\pi/2]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Cette relation donne, pour $x = \pi/8 \not\equiv \frac{\pi}{4} [\pi/2]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$:

$$1 = \tan(\pi/4) = \frac{2\tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)}$$

ce qui donne $\tan^2(\pi/8) + 2\tan(\pi/8) - 1 = 0$. Or l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 1 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant vaut $8 > 0$ et les racines sont donc $\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$. Ainsi, comme $0 < \pi/8 < \pi/2$, $\tan(\pi/8) > 0$ et on obtient finalement :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

4. On a $3\pi/8 = \pi/2 - \pi/8$ donc

$$\tan(3\pi/8) = \frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)} = \frac{\sin(\pi/2 - \pi/8)}{\cos(\pi/2 - \pi/8)} = \frac{\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/8)} = \frac{1}{\tan(\pi/8)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$$

d'où

$$\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On pose $X = \tan(3x)$. On a les équivalences, avec les questions précédentes :

$$\begin{aligned} (\text{E}) &\iff X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0 \\ &\iff X = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad X = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff \tan(3x) = \tan \frac{\pi}{8} \quad \text{ou} \quad \tan(3x) = \tan \frac{3\pi}{8} \\ &\iff 3x = \frac{\pi}{8} [\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv \frac{3\pi}{8} [\pi] \\ &\iff x = \frac{\pi}{24} [\pi/3] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{8} [\pi/3] \end{aligned}$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice DS1.5

1. La fonction f est définie en tout réel x tel que $1 - x \geq 0$, ce qui équivaut à $x \leq 1$: ainsi,

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, 1].}$$

2. Soit $x \in [0, 1]$ (en particulier, $x \in]-\infty, 1]$ donc $f(x)$ est bien défini). Alors on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} -1 &\leq -x \leq 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq 1 - x \leq 1 \\ \Rightarrow \sqrt{1 - x} &\leq 1 \text{ par croissance de la racine carrée} \\ \Rightarrow 0 &\leq 1 - \sqrt{1 - x} \leq 1 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - x}) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{i.e. } \boxed{0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in [0, 1]$. On a les équivalences suivantes (noter que toutes les opérations effectuées sont valables dans les deux sens, ce qui justifie le symbole « $\Leftrightarrow$ ») :

$$\begin{aligned} f(x) \leq x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - x}) \leq x \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x} \leq 2x \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x \leq \sqrt{1 - x} \quad (\star) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que l'inégalité $(\star)$ est vraie pour tout $x \in [0, 1]$. On distingue alors deux cas.

- Si $x \geq 1/2$, alors $1 - 2x$ est négatif ou nul, ce qui implique

$$1 - 2x \leq 0 \leq \sqrt{1 - x}$$

et l'inégalité $(\star)$ est bien vraie.

- Si $x \leq 1/2$, alors les deux membres de $(\star)$ sont positifs ou nuls, donc cette inégalité équivaut à celle obtenue en mettant les deux membres aux carrés, et l'on a :

$$\begin{aligned} (\star) &\Leftrightarrow (1 - 2x)^2 \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 3x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4x \left(x - \frac{3}{4}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

et cette inégalité est vraie puisque $x \geq 0$ et $x \leq \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$.

Dans les deux cas, on a bien $\boxed{f(x) \leq x}$.

4. — Initialisation. On a $u_0 = a$, et par hypothèse $a \in [0, 1]$, donc $u_0 \in [0, 1]$.
 — Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$. Montrons que $u_{n+1} \in [0, 1]$. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1]$, on peut donc appliquer le résultat de la question 2 avec u_n à la place de x , ce qui donne

$$0 \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq 1.$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0, 1]$, ce qui achève la récurrence.

Ceci montre que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n \in [0, 1]$. On peut donc appliquer le résultat de la question 3 avec u_n à la place de x , ce qui donne

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n.$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ est décroissante}}$. De plus, la question 2 montre que $(u_n)_n$ est positive donc minorée par 0 : d'après le théorème de convergence des suites décroissantes et minorées, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge}}$.

6. Par définition de $(u_n)_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - u_n} \right).$$

Sachant que u_n et u_{n+1} tendent tous deux vers l quand $n \rightarrow +\infty$, on peut passer à la limite dans cette égalité, ce qui donne le premier résultat demandé :

$$\boxed{l = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - l} \right)}.$$

Il reste à résoudre cette équation, où l est considérée comme l'inconnue. On a alors les implications suivantes :

$$\begin{aligned} l = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - l} \right) &\implies \sqrt{1 - l} = 1 - 2l \\ &\implies 1 - l = 1 - 2l + 4l^2 \\ &\implies 4l^2 - 3l = 0 \\ &\implies l = 0 \text{ ou } l = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour l , et il reste à vérifier lesquelles conviennent :

- d'une part, $\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 0} \right) = 0$, donc 0 est bien solution ;
- d'autre part, $\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4}$, donc $\frac{3}{4}$ n'est pas solution.

Ainsi, il n'y a qu'une seule valeur possible pour l , qui est $\boxed{l = 0}$.