

DS1

*Durée : 2h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. La présentation est prise en compte dans l'évaluation : pensez à encadrer vos résultats. **Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,2,4 des exercices 3,5.***

Exercice DS1.1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction tangente, notée $\tan$, et montrer que pour tout réel $x \in D$, $\tan(-x) = -\tan(x)$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1$. On écrira cet ensemble sous forme d'un intervalle.

Exercice DS1.2

Soit m un réel fixé. On considère la fonction

$$f_m : x \mapsto \frac{(m-1)x + 1}{mx - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_m qu'on notera $\mathcal{D}_m$.
2. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ de f_m passent par le point A de coordonnées $(0, -1)$.
3. Déterminer les limites de f_m aux bornes de $\mathcal{D}_m$.
4. Donner les variations de f_m (on pourra distinguer les cas selon la valeur du réel m).
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : f_m(x) = 1$.

Exercice DS1.3

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue réelle θ :

$$\cos \theta \cos(3\theta) = b \tag{E}$$

où b est un paramètre réel.

1. Résoudre (E) lorsque $b = 0$.

Dans les questions 2 à 4, on cherche à déterminer les réels b tels que l'équation (E) ait au moins une solution.

2. Montrer que pour tout réel θ ,

$$\cos \theta \cos(3\theta) = \cos^2(2\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \frac{1}{2}.$$

3. On définit la fonction

$$f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ puis sur $[-1, 1]$. On précisera la valeur du minimum de f et le point en lequel il est atteint.

4. En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution si et seulement si $b \in \left[-\frac{9}{16}, 1\right]$. On justifiera soigneusement sa réponse.
5. On souhaite résoudre l'équation (E) lorsque $b = 1$.
 - (a) Déterminer les réels x tels que $f(x) = 1$.
 - (b) Conclure.

Exercice DS1.4

On considère l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan^2(3x) - 2\sqrt{2}\tan(3x) + 1 = 0. \quad (\text{E})$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'équation (E) a un sens.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue $X \in \mathbb{R}$: $X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0$.
3. Exprimer, en précisant pour quels réels x cela a un sens, $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ et en déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. Exprimer très simplement $3\pi/8$ en fonction de $\pi/2$ et $\pi/8$ pour en déduire $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
5. Résoudre finalement (E).

Exercice DS1.5

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f qu'on notera $\mathcal{D}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq x$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel $a \in [0, 1]$, et on considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$ (on pourra utiliser la question 2).

Ceci permet en particulier d'en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{D}$: ainsi, la suite ne « sort » jamais de l'ensemble de définition de f et est donc bien définie.

4. Donner le sens de variations de $(u_n)_n$ (on pourra utiliser les questions 2 et 3) et montrer qu'elle est convergente.
5. On note l la limite de $(u_n)_n$. Montrer que : $l = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-l})$ et en déduire la valeur de l .