

Corrigé du DS7

Exercice DS7.1.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $P = 0$ ou, si $P \neq 0$, en notant $n = \deg P \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Soit $x \in \text{Ker } f$. On a $f(x) = 0_E$ donc, comme f est linéaire :

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$$

donc $x \in \text{Ker } f \circ f$. En conclusion, $\boxed{\text{Ker } f \subset \text{Ker } f \circ f}$.

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On a

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On considère la fonction polynomiale

$$\varphi : x \mapsto (1 - p + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = n(1 - p + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

donc $\boxed{E(X) = p\varphi'(p) = np}$.

Exercice DS7.2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors f est définie si et seulement si la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\ln t}$$

est définie (et continue) sur le segment délimité par x et x^2 (qui est $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$ selon si x^2 est inférieur ou supérieur à x). Ceci impose que :

- x soit strictement positif car sinon, l'intervalle $[x, x^2]$ contient 0, où le logarithme n'est pas défini ;
- x soit différent de 1 car sinon, l'intervalle $[x, x^2]$ est le singleton $\{1\}$, où le logarithme est nul donc son inverse n'est pas défini.

Ainsi, f n'est pas définie ailleurs que sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et si x appartient à cet intervalle, alors :

- soit $0 < x < 1$, auquel cas $0 < x^2 < x < 1$, donc le logarithme est continu et ne s'annule pas sur $[x^2, x]$;
- soit $x > 1$, auquel cas $x^2 > x > 1$, donc le logarithme est continu et ne s'annule pas sur $[x, x^2]$.

Ceci permet de conclure que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[}$.

2. Soit F une primitive sur $\mathcal{D}$ de la fonction $t \mapsto 1/\ln t$. Alors on a

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = F(x^2) - F(x).$$

La fonction F est dérivable de dérivée $t \mapsto 1/\ln t$, et les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont également dérivables, donc d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

On distingue alors deux cas :

- si $x \in]0, 1[$, alors $x - 1 < 0$ et $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$;
- si $x \in]1, +\infty[$, alors $x - 1 > 0$ et $\ln x > 0$, donc $f'(x) > 0$.

La dérivée de f est strictement positive, donc f est strictement croissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition. On peut conclure :

$$f \text{ est strictement croissante sur }]0, 1[\text{ et strictement croissante sur }]1, +\infty[.$$

3. 3.1. Soit $x \in \mathcal{D}$. Si $x \in]0, 1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, donc la fonction $t \mapsto 1/(t \ln t)$ est bien définie et continue sur l'intervalle $[x^2, x]$. Si $x \in]1, +\infty[$, alors on a $1 < x < x^2$, donc la fonction $t \mapsto 1/(t \ln t)$ est bien définie et continue sur l'intervalle $[x, x^2]$. Dans les deux cas, l'intégrale $I(x)$ est bien définie. De plus, en notant u la fonction logarithme qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \left[\ln |u(t)| \right]_{t=x}^{x^2} = \ln |\ln x^2| - \ln |\ln x| = \ln \frac{|\ln x^2|}{|\ln x|} = \ln \frac{|2 \ln x|}{|\ln x|}$$

soit finalement $I(x) = \ln 2$.

- 3.2. Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $x < x^2$, et pour tout $t \in [x, x^2]$, on a $x \leq t \leq x^2$. En divisant cette inégalité par t qui est strictement positif, puis par $\ln t$ qui l'est également (car $t > 1$), on obtient successivement

$$\frac{x}{t} \leq 1 \leq \frac{x^2}{t} \quad \text{puis} \quad \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

- 3.3. Soit $x \in]1, +\infty[$. Par positivité de l'intégrale, en intégrant l'inégalité précédente sur le segment $[x, x^2]$, il vient

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{\ln t} dt.$$

Le membre de gauche de cette double inégalité est $xI(x)$, car x étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le sortir de l'intégrale par linéarité. De même, le membre de droite est $x^2 I(x)$. Puisque $I(x) = \ln 2$ d'après la question 3.1, l'inégalité obtenue est

$$\forall x > 1, \quad x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2.$$

On peut alors en déduire que

- par opération sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln 2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 \ln 2) = \ln 2$ donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$;
- puisque $\ln 2 > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln 2) = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- 3.4. Soit $x \in]0, 1[$. On raisonne comme à la question précédente, mais en partant cette fois-ci du fait que $x^2 < x$, donc que, pour tout $t \in [x^2, x]$,

$$x^2 \leq t \leq x \quad \text{donc} \quad \frac{x^2}{t} \leq 1 \leq \frac{x}{t},$$

la deuxième chaîne d'inégalités étant vérifiée car $t > 0$. On peut alors diviser par $\ln t$, mais il faut changer le sens des inégalités car $\ln t < 0$, donc il vient

$$\forall t \in [x^2, x], \quad \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

Par intégration sur $[x^2, x]$ et grâce à la positivité de l'intégrale, on obtient

$$x \int_{x^2}^x \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t} \leq x^2 \int_{x^2}^x \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\text{soit} \quad x \cdot (-I(x)) \leq -f(x) \leq x^2 \cdot (-I(x)).$$

En tenant compte du résultat de la question 3.1 et en changeant le signe et le sens de ces inégalités, l'encadrement que l'on obtient si $x \in]0, 1[$ est

$$x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2.$$

Les membres extrêmes de cet encadrement tendent tous deux vers 0 quand $x \rightarrow 0$ et vers $\ln 2$ quand $x \rightarrow 1^-$. Par théorème d'encadrement, on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \ln 2.$$

En particulier, f admet une limite finie en 0 et tend vers $\ln 2$ à droite et à gauche en 1, donc admet également une limite finie en 1 :

$$f \text{ est prolongeable par continuité à } \mathbb{R}_+.$$

Le prolongement obtenu, toujours noté f , vérifie $f(0) = 0$ et $f(\ln 2) = \ln 2$.

4. D'après les calculs effectués dans la résolution de la question 1, f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathcal{D}$ en tant que quotient de fonctions qui y sont continues et dont le dénominateur ne s'y annule pas. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

De plus, par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ (c'est une limite du type « $0/\infty$ »). Pour étudier l'existence d'une limite à f' en 1, on pose $x = 1+h$: alors, quand h est au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 1 de $h \mapsto \ln(1+h)$ donne

$$f'(x) = f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} = \frac{h}{h + o(h)} = \frac{1}{1 + o(1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Ainsi, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$. En fin de compte :

- f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$;
- f' admet une limite finie en 0 ainsi qu'en 1.

D'après le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

5. 5.1. Par dérivation de fonctions composées, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $x \mapsto 1+x$ l'est sur $[-1, +\infty[$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $[-1, +\infty[$. De plus, si $x \in]-1, 0[\cap]0, +\infty[$, $1+x$ appartient à $\mathcal{D}$ donc on peut calculer $f'(1+x)$ à l'aide de la formule trouvée à la première question et

$$g'(x) = f'(1+x) \text{ soit } g'(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

5.2. Pour calculer le développement limité à l'ordre 3 de g en 0, on commence par calculer celui à l'ordre 2 de g' . On a pour tout x au voisinage de 0 :

$$g'(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{x}{x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)} = \frac{1}{1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)}.$$

En posant $u = x/2 - x^2/3$, qui est équivalent à $x/2$ donc « d'ordre 1 en x » au voisinage de 0, on a

$$g'(x) = \frac{1}{1 - u(x) + o(x^2)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + o(x^2).$$

On développe le terme $u(x)^2$ en tronquant à l'ordre 2 en x :

$$u(x)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

ce qui en reportant dans l'expression précédente donne

$$g'(x) = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \right) + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Par primitivation des développements limités, il vient

$$g(x) - g(0) = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + o(x^3)$$

soit en tenant compte de ce que $g(0) = f(1) = \ln 2$:

$$g(x) = \ln 2 + x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + o(x^3).$$

6. 6.1. Puisque $x \in]1, +\infty[$, le minimum de l'intervalle $[x, x^2]$ est x , et la fonction logarithme y est croissante donc son inverse y est décroissante. Son minimum est donc atteint en $t = x^2$, et puisque $\ln(x^2) = 2 \ln x$, on peut conclure :

$$\text{le minimum de la fonction } t \mapsto \frac{1}{\ln t} \text{ sur } [x, x^2] \text{ est } \frac{1}{2 \ln x}.$$

- 6.2. La question précédente montre que, pour tout $x \in]1, +\infty[$ fixé,

$$\forall t \in [x, x^2], \quad \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{2 \ln x}.$$

Par positivité de l'intégrale, en intégrant sur $[x, x^2]$, il vient

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{2 \ln x}.$$

Dans membre de droite de cette inégalité, la fonction intégrée est constante par rapport à t , et le membre de gauche vaut $f(x)$. Ainsi,

$$f(x) \geq \frac{x^2 - x}{2 \ln x}$$

d'où l'on déduit en divisant par x :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{x}{2 \ln x} - \frac{1}{2 \ln x}.$$

Par croissances comparées, $\frac{x}{2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc par opération sur les limites,

$$\frac{x}{2 \ln x} - \frac{1}{2 \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par comparaison de limites,

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Montrons que la courbe représentative de f ne peut avoir d'asymptote oblique en $+\infty$. Supposons que ce soit le cas : alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) - (ax + b)$ tende vers 0 en $+\infty$, et dans ce cas

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + \frac{ax + b}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$$

ce qui est contradictoire avec la limite que l'on vient de calculer. En conclusion,

$$\text{la courbe représentative de } f \text{ n'admet pas d'asymptote oblique en } +\infty.$$

Exercice DS7.3.

1. Soit T_k l'événement « On réussit le k -ième travail ». Ces événements étant mutuellement indépendants, on a :

$$P(X_N = N) = P\left(\bigcap_{k=1}^N T_k\right) = \prod_{k=1}^N P(T_k) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{1}{N!}$$

$$P(X_N = N) = \frac{1}{N!}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. On a :

$$P(X_N = k) = P\left(\overline{T_{k+1}} \cap \bigcap_{i=1}^k T_i\right) = P(\overline{T_{k+1}}) \times \prod_{i=1}^k P(T_i)$$

$$P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \prod_{i=1}^k \frac{1}{i} = \frac{k}{(k+1)!}$$

donc $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$

3. Comme $X_N(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$, le théorème de transfert appliqué à $X_N + 1$ donne :

$$E(X_N + 1) = \sum_{k=0}^N (k+1)P(X = k) = 0 + \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} + (N+1) \frac{1}{N!}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(N-1)!} + \frac{1}{N!} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!}$$

donc $E(X_N) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} - 1 = S_N - 1$

4. Appliqué à Z_N , le théorème de transfert donne

$$E(Z_N) = \sum_{k=0}^N (k+1)(k-1)P(X = k)$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)(k-1) \frac{k}{(k+1)!} + (N+1)(N-1) \frac{1}{N!} = \sum_{k=2}^{N-1} (k+1)(k-1) \frac{k}{(k+1)!} + \frac{N^2 - 1}{N!}$$

$$= \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{N^2 - 1}{N!} = \sum_{i=0}^{N-3} \frac{1}{i!} + \frac{N^2 - 1}{N!}$$

donc $E(Z_N) = S_{N-3} + \frac{N^2 - 1}{N!}$

5. On a $E(Z_N) = E(X_N^2 - 1) = E(X_N^2) - 1$, d'où $E(X_N^2) = E(Z_N) + 1 = S_{N-3} + \frac{N^2 - 1}{N!} + 1$. On déduit alors le résultat de la formule de Kœnig-Huygens.

$$V(X_N) = -S_N^2 + 2S_N + S_{N-3} + \frac{N^2 - 1}{N!}$$

6. Puisque la fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $N+1$:

$$e^1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^t}{n!} (1-t)^n dt \quad (*)$$

Or on a $\left| \int_0^1 \frac{e^t}{n!} (1-t)^n dt \right| \leq \int_0^1 \frac{e^t}{n!} |1-t|^n dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t dt \leq \frac{e-1}{n!}$, ce qui prouve :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{n!} (1-t)^n dt = 0.$$

Il ne reste alors plus qu'à faire tendre N vers $+\infty$ dans $(*)$ pour obtenir le résultat.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = e$$

7. On utilisant le résultat précédent, on obtient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N) = e - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} V(X) = e(3 - e)$$

Exercice DS7.4.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$X^k - \alpha^k = (X - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-1-i}.$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Q_k(X) = \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-1-i}$. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et supposons que $P(\alpha) = 0$. On a :

$$P(X) = P(X) - P(\alpha) = \sum_{k=1}^n a_k (X^k - \alpha^k) = (X - \alpha) \sum_{k=1}^n Q_k(X)$$

donc, en posant $Q = \sum_{k=1}^n Q_k(X)$ qui est un polynôme, on a bien : $P = (X - \alpha)Q$.

2. Procédons par récurrence sur le degré de P . Si P est de degré 0 et non nul, il possède 0 racine. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout polynôme P non nul de degré n possède au plus n racines distinctes. Soit P un polynôme de degré $n+1$ (il est non nul). Si P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$, il possède au plus $n+1$ racines. Sinon, P possède une racine α donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P = (X - \alpha)Q$. Ainsi Q est de degré n et possède donc au plus n racines distinctes. Par suite, P possède au plus $n+1$ racines distinctes (les racines de P sont α et celles de Q). En conclusion, $\boxed{\text{un polynôme } P \in \mathbb{K}[X] \text{ possède au plus } \deg P \text{ racines distinctes}}$.

3. On a $V \subset \mathbb{R}[X]$ et, si P est le polynôme nul, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(0) = 0$ donc $P \in V$. Soit $P, Q \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(0) = Q(0) = 0$ donc :

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

donc $\lambda P + \mu Q \in V$. En conclusion, $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

4. On a $X, X^2, \dots, X^n \in V$ donc, comme V est un espace vectoriel, $\text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n) \subset V$. Soit $P \in V$. Il existe $a_0, \dots, a_n$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. De plus, $a_0 = P(0) = 0$ donc

$$P = a_1 X + \dots + a_n X^n \in \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$$

Finalement, $V = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$ c'est-à-dire $\boxed{(X, X^2, \dots, X^n) \text{ est une famille génératrice de } V}$.

5. La famille $(X, X^2, \dots, X^n)$ est échelonnée en degré donc elle est libre. Ainsi, avec la question précédente, $(X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de V . Comme cette famille comporte n vecteurs, $\boxed{\dim V = n}$.

6. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $a_0, \dots, a_n$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a

$$P(X+1) - P(X) = a_n (X+1)^n - X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

donc $\boxed{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ comme somme de polynômes de degré au plus } n-1}$.

7. Soit $P, Q \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).$$

Finalement, $\boxed{\Delta \text{ est linéaire}}$.

8. On a $\dim V = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il suffit donc, pour montrer que Δ est un isomorphisme, de montrer que Δ est injective. Soit $P \in \text{Ker } \Delta$. On a $P(X+1) - P(X) = 0$ et $P(0) = 0$ donc par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = 0$. Ainsi, P possède une infinité de racines. Si P n'était pas nul, ceci contredirait le fait que $\deg P \leq n-1$ donc P est nul. En conclusion, $\boxed{\text{Ker } P = \{0\} \text{ donc } \Delta \text{ est un isomorphisme}}$.

Une application

9. On a : $\Delta(B_1) = \Delta(X) = 1 = B_0$. On a également

$$\Delta(B_2) = B_2(X+1) - B_2(X) = \frac{1}{2}(X+1)X - \frac{1}{2}X(X-1) = X = B_1(X)$$

et de même $\Delta(B_3) = B_2$. Finalement, pour tout $i = 1, 2, 3$, $\Delta(B_i) = B_{i-1}$.

10. Comme Δ est un isomorphisme et que $X^2 \in \mathbb{R}_{3-1}[X]$, il existe un unique polynôme $Q \in V$ tel que $\Delta(Q) = X^2$.

11. On a directement $X^2 = 2B_2 + B_1$.

12. On a : $Q(X+1) - Q(X) = X^2$ donc

$$\sum_{k=0}^n i^2 = \sum_{i=0}^n (Q(i+1) - Q(i)) = Q(n+1) - Q(0) = Q(n+1)$$

car $Q(0) = 0$. Il reste à calculer Q . On a

$$Q(X) = \Delta^{-1}(X^2) = 2\Delta^{-1}(B_2) + \Delta^{-1}(B_1) = 2B_3 + B_2.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n i^2 = 2B_3(n+1) + B_2(n+1) = 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

13. On pourrait construire une base $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ de la même forme que précédemment de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer Q tel que $\Delta(Q) = X^k$ qu'on décompose dans la base $\mathcal{B}$. On obtient ensuite

$$\sum_{i=0}^n i^k = Q(n+1).$$

Exercice DS7.5.

1. 1.1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

— D'une part, d'après la formule du binôme de Newton,

$$V_k = \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} X^j \frac{(-1)^{k-j}}{2^{k-j}}.$$

Ainsi, $\deg V_k = k$ et son coefficient dominant est celui correspondant à $j = k$ dans la somme ci-dessus :

$$V_k \text{ est de degré } k \text{ et son coefficient dominant est } 1.$$

— D'autre part, supposons que maintenant que $k \leq n$. Alors, par le même raisonnement que ci-dessus, $(1-X)^{n-k}$ est de degré $n-k$ et de coefficient dominant $(-1)^{n-k}$. Multiplier par X^k ne change pas le coefficient dominant et ajoute k au degré. On peut en déduire le résultat :

$$U_k \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } (-1)^{n-k}.$$

1.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 1.1, la famille $(V_0, \dots, V_p)$ est échelonnée en degré. D'après un résultat du cours, elle est donc libre. De plus, elle est de cardinal $p+1$, qui est aussi la dimension de $\mathbb{R}_p[X]$, ce qui prouve le résultat demandé.

$$\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (V_0, \dots, V_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X].$$

1.3. Montrons par récurrence pour q que la propriété $\mathcal{P}(q)$: « La famille $(U_0, \dots, U_q)$ est libre » est vraie pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

— *Initialisation.* Le polynôme U_0 est non nul, donc la famille formée par ce seul polynôme est libre : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité.* Soit $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+2}$ tels que $\lambda_0 U_0 + \dots + \lambda_{q+1} U_{q+1} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} & \lambda_0(1-X)^n + \lambda_1 X(1-X)^{n-1} + \dots + \lambda_{q+1} X^{q+1}(1-X)^{n-(q+1)} \\ &= (1-X)^{n-(q+1)} \cdot \left(\lambda_0(1-X)^{q+1} + \lambda_1 X(1-X)^q + \dots + \lambda_{q-1} X^q(1-X) + \lambda_{q+1} X^{q+1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Un produit de polynômes étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, il vient

$$\lambda_0(1-X)^{q+1} + \lambda_1 X^2(1-X)^q + \dots + \lambda_q X^q(1-X) + \lambda_{q+1} X^{q+1} = 0.$$

En évaluant ce polynôme en 1, on obtient $\lambda_{q+1} = 0$. On reporte cette égalité dans l'hypothèse de départ sur $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q+1})$ ce qui donne

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_q U_q = 0$$

ce qui entraîne $\lambda_0 = \dots = \lambda_q = 0$ puisque, par hypothèse de récurrence, la famille $(U_0, \dots, U_q)$ est libre. Ainsi,

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{q+1} = 0$$

ce qui prouve que $(U_0, \dots, U_{q+1})$ est libre : $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

Ceci achève la récurrence et montre que $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et la famille $(U_0, \dots, U_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_{n+1}[X]$. Or, elle comporte $n+1$ vecteurs soit autant que la dimension de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$:

$$\boxed{(U_0, \dots, U_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_{n+1}[X].}$$

2. 2.1. D'une part, les polynômes X^p et $(1-X)^p$ sont tous deux de degré p , donc leurs dérivées d'ordre strictement plus grand que p sont nulles :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad (q > p \implies (X^p)^{(q)} = ((1-X)^p)^{(q)} = 0).$$

Il reste à montrer que les formules proposées sont vraies pour $q \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Soit $\mathcal{P}(q)$ la propriété :

$$\ll (X^p)^{(q)} = \frac{p!}{(p-q)!} X^{p-q} \quad \text{et} \quad ((1-X)^p)^{(q)} = (-1)^q \frac{p!}{(p-q)!} (1-X)^{p-q} \gg.$$

Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $q \in \llbracket 0, p \rrbracket$.

— *Initialisation.* On a

$$\frac{p!}{(p-0)!} X^{p-0} = X^p = (X^p)^{(0)} \quad \text{et} \quad (-1)^0 \frac{p!}{(p-0)!} (1-X)^{p-0} = (1-X)^p = ((1-X)^p)^{(0)}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité.* Soit $q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. On a par hypothèse de récurrence

$$(X^p)^{(q)} = \frac{p!}{(p-q)!} X^{p-q} \quad \text{et} \quad ((1-X)^p)^{(q)} = (-1)^q \frac{p!}{(p-q)!} (1-X)^{p-q}$$

d'où par dérivation et puisque $p-q > 0$,

$$\begin{aligned} (X^p)^{(q+1)} &= \frac{p!}{(p-q)!} (p-q) X^{p-q-1} = \frac{p!}{(p-(q+1))!} X^{p-(q+1)} \\ \text{et} \quad (1-X)^{(q+1)} &= (-1)^q \frac{p!}{(p-q)!} (p-q) \cdot (-1) \cdot (1-X)^{p-q-1} \\ &= (-1)^{q+1} \frac{p!}{(p-(q+1))!} (1-X)^{p-(q+1)} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

Ceci achève la récurrence et montre la formule demandée :

Pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$(X^p)^{(q)} = \begin{cases} \frac{p!}{(p-q)!} X^{p-q} & \text{si } q \leq p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad ((1-X)^p)^{(q)} = \begin{cases} (-1)^q \frac{p!}{(p-q)!} (1-X)^{p-q} & \text{si } q \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2. Par définition, $Q = X^n(1-X)^n$ donc Q est de degré $2n$: on en déduit que $Q^{(n)}$ est de degré n donc $Q^{(n)} \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, on a

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= (X^n \cdot (1-X)^n)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^n)^{(n-k)} ((1-X)^n)^{(k)} \quad \text{d'après la formule de Leibnitz} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-(n-k))!} X^{n-(n-k)} \cdot (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

où, dans la troisième égalité, on a appliqué pour chaque k les résultats de la question précédente pour calculer $(X^n)^{(n-k)}$ et $((1-X)^n)^{(n-k)}$. Ainsi,

$$Q^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot n! \cdot (-1)^k X^k (1-X)^{n-k}$$

$$\text{soit} \quad Q^{(n)} = n! \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k U_k.$$

2.3. On a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$U_k(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}.$$

En reportant dans la formule obtenue à la question précédente, puis en « sortant » le $1/2^n$ qui ne dépend pas de k , on obtient la formule demandée :

$$Q^{(n)}(1/2) = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k.$$

3. 3.1. L'identité remarquable « $a^2 - b^2$ » fournit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)^n &= \left(\left(\frac{1}{2} - \left(X - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \left(X - \frac{1}{2}\right)\right)\right)^n \\ &= ((1-X)X)^n \\ &= (1-X)^n X^n \end{aligned}$$

$$\text{ce qui est bien } Q(X) : Q(X) = \left(\frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)^n.$$

3.2. X^n et $(1-X)^n$ sont tous deux de degré n , donc par opérations sur le degré, leur produit est de degré $2n$: $Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. De plus, en appliquant le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{1}{4^{n-k}} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2n-2k}} V_{2k}. \end{aligned}$$

En changeant 4^{n-k} en 2^{2n-2k} , puis en posant $j = 2k$ (de sorte que j parcourt les entiers pairs entre 0 et $2n$), on obtient finalement

$$Q = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \text{ pair}}} \binom{n}{j/2} \frac{(-1)^{j/2}}{2^{2n-j}} V_j.$$

3.3. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d . D'après la formule de Taylor pour les polynômes appliquée avec « $a = 1/2$ »,

$$P = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(1/2)}{k!} \left(X - \frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^d \frac{P^{(k)}(1/2)}{k!} V_k.$$

Puisque $(V_0, \dots, V_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$, ceci fournit le résultat par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel.

$$\text{Les coordonnées de } P \text{ dans } (V_0, \dots, V_d) \text{ sont } P(1/2), \frac{P'(1/2)}{1!}, \dots, \frac{P^{(d)}(1/2)}{d!}.$$

3.4. D'après la question précédente, et puisque Q est de degré $2n$, pour tout $j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, le coefficient d'indice j dans la décomposition de Q sur la base $(V_0, \dots, V_{2n})$ est $P^{(j)}(1/2)/j!$. Or, le résultat de la question 3.2. montre que :

- si j est impair, ce coefficient est nul car V_j n'apparaît pas dans la somme ;
- si j est pair, ce coefficient vaut $\binom{n}{j/2} \frac{(-1)^{j/2}}{2^{2n-j}}$, autrement dit

$$\frac{P^{(j)}(1/2)}{j!} = \binom{n}{j/2} \frac{(-1)^{j/2}}{2^{2n-j}}$$

Ceci donne le résultat :

$$\forall j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, Q^{(j)}(1/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est impair,} \\ \binom{n}{j/2} \frac{(-1)^{j/2} j!}{2^{2n-j}} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

4. On a :

- d'après la question 2.3, $Q^{(n)}(1/2) = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k$;
- d'après la question 3.4 appliquée avec $j = n$, $Q^{(n)}(1/2)$ est nul si n est impair, et si n est pair, il vaut $\binom{n}{n/2} \frac{(-1)^{n/2}}{2^n}$.

En identifiant ces deux expressions de $Q^{(n)}(1/2)$, on obtient que la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k$ est nulle si n est impair, et que si n est pair, alors

$$\frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = \binom{n}{n/2} \frac{(-1)^{n/2} n!}{2^n}.$$

Le résultat demandé suit en simplifiant cette égalité par $n!/2^n$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$