

DS7

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,2,3,5 de l'exercice 4.

Exercice DS7.1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Énoncer, sans démonstration, la formule de Taylor pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que, pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E , $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f \circ f$.
3. Déterminer, en justifiant, la valeur de l'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Exercice DS7.2.

Dans cet exercice, on considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Justifier que f est définie sur l'ensemble $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}$ (on ne demande pas de calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$).
3. 3.1. Soit $x \in \mathcal{D}$. On pose

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

Justifier que $I(x)$ est bien définie et calculer sa valeur.

- 3.2. Soit $x \in]1, +\infty[$. Montrer que :

$$\forall t \in [x, x^2], \quad \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

- 3.3. En déduire que : $f(x) \xrightarrow[x > 1]{x \rightarrow 1} \ln 2$ et donner la limite de f en $+\infty$.

- 3.4. Déterminer les limites de f en 0 et en 1^- et montrer qu'elle se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On raisonnera comme aux questions 3.2. et 3.3., mais en prenant garde à l'ordre des bornes dans les intégrales et au sens des inégalités que l'on écrira.

Dans la suite de l'exercice, on note toujours f le prolongement obtenu à la question 3.4.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On pourra poser $x = 1 + h$ pour étudier le comportement de f' en 1, et on citera précisément le théorème utilisé et ses hypothèses.

5. On pose pour $x \in [-1, +\infty[$: $g(x) = f(1+x)$.

- 5.1. Montrer que g est dérivable sur $[-1, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$,

$$g'(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

- 5.2. Donner le développement limité d'ordre 3 de g au voisinage de 0.

6. 6.1 Soit $x \in]1, +\infty[$. Quel est le minimum de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ sur $[x, x^2]$?

- 6.2 Déduire de la question précédente que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Est-il possible que la courbe représentative de f admette une asymptote oblique en $+\infty$?

Exercice DS7.3.

On joue $N \geq 3$ parties à un jeu dont la difficulté est croissante entre chaque partie : on suppose qu'on a une probabilité égale à $\frac{1}{k}$ de réussir la k -ième partie, et que les différentes parties sont mutuellement indépendantes. Soit X_N la variable aléatoire égale au nombre de parties effectuées avant le premier échec. Ainsi, pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ l'événement $(X_N = k)$ est réalisé lorsqu'on a perdu à la $(k+1)$ -ième partie et l'événement $(X_N = N)$ signifie qu'on a gagné toutes les parties.

1. Calculer $P(X_N = N)$.
2. Montrer que $P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$ pour $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

3. Montrer que $E(X_N) = S_N - 1$.

Soit Z_N la variable aléatoire définie par $Z_N = (X_N + 1)(X_N - 1)$.

4. Exprimer $E(Z_N)$ en fonction de S_{N-3} et de N .
5. En déduire $V(X_N)$ en fonction de S_N , S_{N-3} et N .
6. Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = e$.
7. Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N)$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} V(X_N)$.

Exercice DS7.4.

Ce problème étudie une application qui permet de calculer certaines sommes complexes. On rappelle que si $P(X)$ est un polynôme, le polynôme $P(X+1)$ est le polynôme où l'on a remplacé l'indéterminée X par $X+1$: par exemple, si $P(X) = X^4$, $P(X+1) = (X+1)^4$ et si $P(X) = 1 = X^0$, $P(X+1) = (X+1)^0 = 1$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions préliminaires

On rappelle que si $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que si α est une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.
2. En déduire qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul possède au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Définition de Δ

On introduit l'ensemble

$$V = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}.$$

3. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que $(X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de V .
5. Déterminer la dimension de V .
6. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On peut ainsi introduire l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : V &\longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}.$$

7. Montrer que Δ est une application linéaire.

Bijektivité de Δ

8. Justifier que Δ est un isomorphisme. On pourra montrer que si P est un élément du noyau de Δ alors il a une infinité de racines et utiliser les questions préliminaires.

Une application

On introduit les polynômes :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = X, \quad B_2 = \frac{1}{2} X(X-1), \quad B_3 = \frac{1}{6} X(X-1)(X-2).$$

On suppose dans la suite que $n = 3$.

9. Calculer $\Delta(B_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.
10. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in V$ tel que $\Delta(Q) = X^2$.
11. Déterminer des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ réels tel que $X^2 = \sum_{i=0}^2 \lambda_i B_i$.
12. En déduire une formule pour $\sum_{i=0}^n i^2$ en fonction de Q puis directement en fonction de n .

13. De façon générale, comment obtient-on une expression simple de $\sum_{i=1}^n i^k$ lorsque $k \in \mathbb{N}$?

Exercice DS7.5.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel fixé, et on considère les polynômes suivants :

- $Q = X^n(1 - X)^n$;
- pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $U_k = X^k(1 - X)^{n-k}$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V_k = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k$.

1. 1.1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner le degré de V_k et son coefficient dominant. Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donner le degré de U_k et son coefficient dominant.
- 1.2. Justifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(V_0, \dots, V_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
- 1.3. Montrer que $(U_0, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra montrer par récurrence sur q que, pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la famille $(U_0, \dots, U_q)$ est libre.

Dans toute la suite de l'exercice, si d est un entier naturel, $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $(P_0, \dots, P_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$, « exprimer P dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ » signifie l'écrire sous la forme

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_d P_d = \sum_{k=0}^d \alpha_k P_k$$

où $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ sont des réels qu'on appellera « coordonnées de P dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ ». On rappelle également que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne le polynôme dérivé k -ième de P .

2. 2.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$(X^p)^{(q)} = \begin{cases} \frac{p!}{(p-q)!} X^{p-q} & \text{si } q \leq p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$((1-X)^p)^{(q)} = \begin{cases} (-1)^q \frac{p!}{(p-q)!} (1-X)^{p-q} & \text{si } q \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 2.2. Justifier que $Q^{(n)}$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer $Q^{(n)}$ dans la base $(U_0, U_1, \dots, U_n)$. On pourra utiliser la formule de Leibnitz.
- 2.3. Montrer que : $Q^{(n)}(1/2) = \frac{n!}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k$.
3. 3.1. Montrer que : $Q(X) = \left(\frac{1}{4} - \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right)^n$.
- 3.2. Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et l'exprimer dans la base $(V_0, \dots, V_{2n})$.
- 3.3. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d , les coordonnées de P dans la base $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_d)$ sont

$$\frac{P(1/2)}{0!}, \frac{P'(1/2)}{1!}, \frac{P''(1/2)}{2!}, \dots, \frac{P^{(d)}(1/2)}{d!}.$$

- 3.4. En déduire que pour tout $j \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $Q^{(j)}(1/2)$ est nul si j est impair, et l'exprimer en fonction de j et n si j est pair.
4. Démontrer la formule :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$