

Corrigé du DS6

Exercice DS6.1.

1. On a :

$$\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)}{(1 + x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - x/2 + x^2/3 + o(x^2)}{1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2)}.$$

On utilise le développement limité de $1/(1+u)$ au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+u} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

qui, par le changement de variable $u = x/2 + x^2/6$ (qui est équivalent à x quand $x \rightarrow 0$, donc en particulier tend vers 0), donne, en tronquant à l'ordre 2 en x :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \end{aligned}$$

En développant le produit puis en tronquant à nouveau à l'ordre 2 en x , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

soit $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)}.$

2. On commence par remarquer que l'ordre des vecteurs ne changeant rien au caractère libre ou lié d'une famille, il suffit que le résultat soit vrai en $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ pour qu'il soit vrai pour tout n -uplet de réels deux à deux distincts. On effectue alors une récurrence : soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

« Pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$,
la famille des fonctions $f_1 : x \mapsto e^{\alpha_1 x}, \dots, f_n : x \mapsto e^{\alpha_n x}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

On va montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation.* Prenons $n = 1$. La famille considérée est constituée d'une fonction non identiquement nulle, elle est donc libre : $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie ; montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soient $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1}$ des réels, et pour chaque $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, f_i la fonction $x \mapsto e^{\alpha_i x}$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1} \text{ soit la fonction nulle.}$$

Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n e^{\alpha_i x} = e^{\alpha_n x} \cdot \left(\sum_{i=1}^n e^{(\alpha_i - \alpha_n)x} \right) = 0.$$

En divisant par $e^{\alpha_n x}$ qui n'est pas nul et en isolant le dernier terme de la somme, il vient

$$\left(\sum_{i=1}^n e^{(\alpha_i - \alpha_n)x} \right) + \lambda_{n+1} = 0.$$

Dans toutes les exponentielles ci-dessus, l'exposant est négatif, donc tous les termes de cette somme tendent vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$. L'hypothèse de départ sur les fonctions $f_1, \dots, f_n$ devient alors

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \text{ est la fonction nulle.}$$

Or par hypothèse de récurrence la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et ceci impose donc que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. On obtient donc bien

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$$

et la famille $(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ est libre : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\text{la famille des fonctions } x \mapsto e^{\alpha_1 x}, x \mapsto e^{\alpha_2 x}, \dots, x \mapsto e^{\alpha_n x} \text{ est libre dans } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

3. On appelle A l'événement « le conducteur a un accident » et B l'événement « l'article parvient au client en bon état ». L'énoncé nous dit que

$$P(B|\bar{A}) = \frac{9}{10}, P(B|A) = \frac{3}{10} \text{ et } P(A) = \frac{2}{10}$$

et le but de la question est de calculer $P(A|\bar{B})$. On applique pour cela la formule de Bayes selon laquelle

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|A)P(A)}{P(\bar{B}|A)P(A) + P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A})}$$

avec

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = \frac{7}{10} \quad \text{et} \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}) = \frac{1}{10}.$$

En reportant dans la formule précédente il vient

$$P(A|\bar{B}) = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5}}$$

ce qui donne après simplification $\boxed{P(A|\bar{B}) = \frac{7}{11}}.$

Exercice DS6.2.

1. 1.1. D'une part, $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$, donc par définition du sous-espace vectoriel engendré par un ensemble, G est un sous-espace vectoriel de E . D'autre part, F contient le vecteur nul de E et n'est donc pas vide ; de plus, soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: alors

$$(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') = \lambda \cdot (x - 2y) + \mu \cdot (x' - 2y') = 0 \text{ car } (u, v) \in F^2$$

$$\text{et} \quad 2(\lambda z + \mu z') - (\lambda t + \mu t') = \lambda \cdot (2z - t) + \mu \cdot (2z' - t') = 0 \text{ car } (u, v) \in F^2.$$

Le vecteur $\lambda u + \mu v$ appartient donc à F , puisqu'il vérifie les équations de F . Ainsi F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs, ce qui achève la démonstration :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E.}$$

- 1.2. Par définition du sous-espace vectoriel engendré par un ensemble, la famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de G . Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$. Alors

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda, \mu, \lambda, \mu) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{donc } \lambda = \mu = 0.$$

Cette famille est donc libre, et en fin de compte, $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } G}.$

— Montrons que la famille (f_1, f_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0_E$. Alors

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = (2\lambda, \mu, \lambda, 2\mu) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{donc } \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi, (f_1, f_2) est une famille libre.

— Montrons que (f_1, f_2) est une famille génératrice de F . Soit $u \in F$, $u = (x, y, z, t)$. On sait alors d'après les équations de F que $x = 2y$ et que $t = 2z$. Par conséquent,

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ z \\ 2z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y f_1 + z f_2.$$

Ainsi, tout vecteur de F est combinaison linéaire de f_1 et f_2 , qui est donc une famille génératrice de F .

On conclut que $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est une base de } F}$.

2. 2.1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = \lambda \cdot (1, 0, 1, 0) + \mu \cdot (0, 1, 0, 1) = (\lambda, \mu, \lambda, \mu).$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation de F , il vient

$$\lambda e_1 + \mu e_2 \in F \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

soit $\boxed{\lambda = \mu = 0}$.

2.2. La question précédente montre que si une combinaison linéaire de e_1 et e_2 appartient à F , alors c'est la combinaison linéaire nulle : puisque $\text{Vect}(e_1, e_2) = G$, ceci équivaut à dire que tout élément de G qui appartient également à F est le vecteur nul, et le vecteur nul appartient également à F et G puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E . Autrement dit, $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$.

3. 3.1. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Résolvons l'équation « $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$ » d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_1 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 + 2\lambda_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z - x = -2\lambda_3 + \lambda_4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ t - y = -\lambda_3 + 2\lambda_4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z - x = 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ -x - 2y - z + 2t = 3\lambda_4 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ -4x - 2y + 2z + 2t = 6\lambda_3 & 3L_3 + L_4 \leftarrow 3L_3 + L_4 \\ -x - 2y - z + 2t = 3\lambda_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 7x + 2y - 2z + 2t = 3\lambda_1 & L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ 2x + 4y - z - t = 3\lambda_2 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3/2 \\ -2x - y + z + t = 3\lambda_3 & L_3 \leftarrow L_3/2 \\ -x - y - z + t = 3\lambda_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci prouve que, pour tout $u \in E$, l'équation « $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2$ » admet une unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$: autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, f_1, f_2 , ce qui signifie exactement que $\boxed{(e_1, e_2, f_1, f_2) \text{ est une base de } E}$.

- 3.2. La question précédente montre que, pour tout $u \in E$, il existe un unique quadruplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2.$$

En notant $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et $w = \lambda_3 f_1 + \lambda_4 f_2$, on a alors

$$\begin{cases} u = v + w \\ v \in G \\ w \in F \end{cases}$$

et une telle écriture est possible pour tout vecteur $u \in E$:

tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

4. — D'après la question 3.2, tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : autrement dit, $E \subset F + G$, et l'inclusion réciproque est évidente, donc $F + G = E$.

— D'après la question 2.2, $F \cap G = \{0_E\}$, donc la somme $F + G$ est directe.

Ceci prouve que $F \oplus G = E$: F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice DS6.3.

- Si le joueur ne possède aucun jeton, il est ruiné dès le départ donc $u_0 = 1$. S'il possède N jetons, le jeu se termine immédiatement par sa victoire et il ne peut être ruiné donc $u_N = 0$.
- Soit $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. La quantité $P(E_n|G_1)$ est la probabilité que le joueur gagne avec n jetons lorsqu'il gagne le premier jeu, c'est la même probabilité que lorsqu'il gagne avec $n+1$ jetons. Ainsi, $P(E_n|G_1) = P(E_{n+1}) = u_{n+1}$.
- Soit $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. De la même manière que dans la question précédente, $P(E_n|\overline{G_1}) = P(E_{n-1}) = u_{n-1}$. La famille d'événements $(G_1, \overline{G_1})$ est un système complet d'événements. Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(E_n) = P(E_n|G_1)P(G_1) + P(E_n|\overline{G_1})P(\overline{G_1}).$$

De plus, d'après l'énoncé $P(G_1) = p$ et, par conséquent, $P(\overline{G_1}) = 1 - p$.

Ainsi, pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$P(E_n) = P(E_n|G_1)p + P(E_n|\overline{G_1})(1-p).$$

En conclusion, pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $u_n = p u_{n+1} + (1-p) u_{n-1}$.

4. La relation de la question précédente définit une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On calcule les racines du polynôme

$$P(X) = pX^2 - X + 1 - p.$$

1 est clairement une racine de P . De plus le produit des racines de P vaut $(1-p)/p = x$. Ainsi, les racines de P sont 1 et x . Par conséquent, il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$u_n = \alpha 1^n + \beta x^n = \alpha + \beta x^n.$$

De plus, avec les valeurs de $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on a :

$$1 = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad \alpha + \beta x^N = 0$$

qui donne, après résolution

$$\alpha = \frac{x^N}{x^N - 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{1 - x^N}.$$

Finalement, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$u_n = \frac{x^N}{x^N - 1} + \frac{1}{1 - x^N} x^n = 1 - \frac{x^n - 1}{x^N - 1}.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi : x \mapsto x^k - 1$ est dérivable en 1 et $\varphi'(1) = k$. Ainsi,

$$\boxed{x^k - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \varphi'(1)(x - 1) = k(x - 1)}.$$

6. On a, avec la question précédente,

$$\frac{x^n - 1}{x^N - 1} \frac{x - 1}{x^N - 1} \times \frac{x^n - 1}{x - 1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} = \frac{n(x - 1)}{N(x - 1)} = \frac{n}{N}.$$

Ainsi, lorsque le joueur joue à un jeu équilibré (p proche de $1/2$, c'est-à-dire x proche de 1),

la probabilité pour lui de gagner est proche de $\frac{n}{N}$.

Exercice DS6.4.

1. La matrice nulle appartient à $\mathcal{E}_A$ (en prenant par exemple $p = 0$ et $a_0 = 0$), donc $\mathcal{E}_A$ n'est pas vide. Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire. Soit $(B, C) \in \mathcal{E}_A^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Par définition, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{K}^{q+1}$ tels que

$$B = \sum_{k=0}^p b_k A^k \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=0}^q c_k A^k.$$

En posant $r = \max(p, q)$ puis :

- $b_{p+1} = \dots = b_r$ si $p < r$
- $c_{q+1} = \dots = c_r$ si $q < r$

il vient $B = \sum_{k=0}^r b_k A^k$ et $C = \sum_{k=0}^r c_k A^k$, d'où l'on déduit

$$\lambda B + \mu C = \lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^r b_k A^k \right) + \mu \cdot \left(\sum_{k=0}^r c_k A^k \right) = \sum_{k=0}^r (\lambda b_k + \mu c_k) A^k.$$

Ainsi $\lambda B + \mu C \in \mathcal{E}_A$. Ceci prouve que $\mathcal{E}_A$ n'est pas vide et est stable par combinaison linéaire : en conclusion, $\mathcal{E}_A$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

2. On obtient $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0_3$.

3. On a immédiatement $A = 2I_3 + M$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $A^k = (2I_3 + M)^k$, et les matrices $2I_3$ et M commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M^j (2I_3)^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{k-j} M^j.$$

Or, dans la somme ci-dessus, tous les termes d'indice $j \geq 3$ sont nuls car on a alors $M^j = M^3 \times M^{j-3} = 0_n$. Ainsi, si $k \geq 2$, et sachant que

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{1} = k \quad \text{et} \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

on obtient

$$A^k = 2^k I_3 + k 2^{k-1} M + k(k-1) 2^{k-3} M^2$$

ce qui donne le résultat demandé avec $u_k = 2^k$, $v_k = k 2^{k-1}$ et $w_k = k(k-1) 2^{k-3}$. On constate de plus que, puisque $A^0 = I_3$ et $A^1 = 2I_3 + M$, cette formule est également vraie pour $k = 0$ ou $k = 1$. Ceci achève la démonstration :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \exists (u_k, v_k, w_k) \in \mathbb{K}^3, A^k = u_k I_3 + v_k M + w_k M^2.}$$

Remarque : on pouvait aussi raisonner par récurrence sur k .

5. — Montrons que la famille (I_3, M, M^2) est libre. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = 0_n$. Alors

$$\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et pour que cette matrice soit nulle, il faut que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ceci prouve que la famille (I_3, M, M^2) est libre.

- Montrons maintenant que cette famille engendre $\mathcal{E}_A$. Soit $B \in \mathcal{E}_A$: il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que $B = \sum_{k=0}^p a_k A^k$. Alors en appliquant la question précédente :

$$B = \sum_{k=0}^p a_k \cdot (u_k I_3 + v_k M + w_k M^2) = \left(\sum_{k=0}^p a_k u_k \right) \cdot I_3 + \left(\sum_{k=0}^p a_k v_k \right) \cdot M + \left(\sum_{k=0}^p a_k w_k \right) \cdot M^2.$$

Ainsi, B est combinaison linéaire de I_3 , M et M^2 , et ceci est valable pour tout $B \in \mathcal{E}_A$: la famille (I_3, M, M^2) est donc génératrice de $\mathcal{E}_A$.

En conclusion, la famille (I_3, M, M^2) est une base de $\mathcal{E}_A$.

6. Par hypothèse, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N} : N^j = 0_n\}$ contient p , c'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc *cet ensemble admet un plus petit élément q* . De plus, par hypothèse, $N^1 \neq 0_n$ donc $q \neq 1$, et bien entendu $N^0 = I_3 \neq 0_n$ donc $q \neq 0$: ainsi, $q \geq 2$.

7. 7.1. On a

$$\begin{aligned} N^{q-1} \cdot (\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1}) &= N^{q-1} \cdot \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i N^i \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i N^{q-1+i} \\ &= \lambda_0 N^{q-1} + \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i N^q N^{i-1}. \end{aligned}$$

Dans le dernier membre de cette égalité, la deuxième somme est nulle puisque $N^q = 0_n$: ainsi

$$\boxed{N^{q-1} \cdot (\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1}) = \lambda_0 N^{q-1}.$$

- 7.2. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$ tel que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1} = 0_n$. Montrons que, pour tout $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, on a $\lambda_k = 0$. On raisonne par récurrence forte sur k .

- *Initialisation*. Montrons que $\lambda_0 = 0$. On a $\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1} = 0_n$, donc en appliquant la question précédente,

$$N^{q-1} \cdot (\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1}) = \lambda_0 N^{q-1} = 0_n.$$

Puisque N^{q-1} n'est pas la matrice nulle, ceci impose $\lambda_0 = 0$.

- *Hérédité*. Soit $k \in \llbracket 0, q-2 \rrbracket$ et supposons que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Montrons que $\lambda_{k+1} = 0$. Puisque les λ_i sont tous nuls pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, l'hypothèse de départ sur $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1})$ devient

$$\lambda_{k+1} N^{k+1} + \lambda_{k+2} N^{k+2} + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1} = \sum_{i=k+1}^{q-1} \lambda_i N^i = 0_n.$$

En multipliant ceci par la matrice N^{q-k-2} il vient

$$\lambda_{k+1} N^{q-1} + \sum_{i=k+2}^{q-1} \lambda_i N^{i+q-k-2} = \lambda_{k+1} N^{q-1} + \sum_{i=k+2}^{q-1} \lambda_i N^q N^{i-(k-2)} = 0_n.$$

Comme précédemment, tous les termes de la dernière somme ci-dessus sont nuls puisque $N^q = 0_n$, ce qui donne $\lambda_{k+1} N^{q-1} = 0_n$ et la matrice N^{q-1} n'est pas la matrice nulle : ainsi, $\lambda_{k+1} = 0$.

Conclusion : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$, et la famille $(I_n, N, \dots, N^{q-1})$ est libre dans $M_n(\mathbb{K})$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, et puisque les matrices μI_3 et N commutent, on a

$$A^k = (\mu I_3 + N)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^{k-j} N^j.$$

- Si $k \leq q-1$, alors cette somme est bien une combinaison linéaire (quitte à rajouter des coefficients nuls) de $I_3, N, \dots, N^{q-1}$.
- Si $k \geq q$, alors on peut écrire

$$A^k = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{k}{j} \mu^{k-j} N^j + \sum_{j=q}^k \mu^{k-j} N^q N^{k-j}.$$

Là encore tous les termes de cette dernière somme sont nuls car $N^q = 0_n$ ce qui conduit à

$$A^k = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{k}{j} \mu^{k-j} N^j.$$

Dans les deux cas, A^k est combinaison linéaire de $I_n, N, \dots, N^{q-1}$.

On pouvait là aussi raisonner par récurrence sur k .

9. D'après la question 7.2, la famille $(I_n, N, \dots, N^{q-1})$ est libre, donc il reste à démontrer qu'elle engendre $\mathcal{E}_A$. Soit $B \in \mathcal{E}_A$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que

$$B = \sum_{k=0}^p a_k A^k.$$

D'après la question 8, chaque A^k , $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, est une combinaison linéaire de $I_n, N, \dots, N^{q-1}$, donc appartient à $\text{Vect}(I_n, N, \dots, N^{q-1})$. Comme ce dernier ensemble est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$, il est stable par combinaison linéaire, donc puisque B est une combinaison linéaire de $I_3, A, A^2, \dots, A^p$, B appartient également à $\text{Vect}(I_n, N, \dots, N^{q-1})$: ainsi, B est une combinaison linéaire de $I_n, N, \dots, N^{q-1}$. Ceci est valable pour tout $B \in \mathcal{E}_A$, ce qui signifie que la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{q-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}_A$. En conclusion,

la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{q-1})$ est une base de $\mathcal{E}_A$.

Exercice DS6.5.

1. Par composition, comme $\exp$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, φ également et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 3(1 - 2x^2)e^{-x^2} = -6 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-x^2}.$$

Par croissances comparées $xe^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ donc, par opérations $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -1$. On obtient ainsi le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0
$\varphi(x)$	-1	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	-1

Compte-tenu du tableau de variations de f , $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = -1$.

2. Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par la formule de Taylor-Young,

f admet un développement limité à tout ordre en 0.

3. La fonction $\exp$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$\exp(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

donc, par changement de variable :

$$\exp(-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

où la dernière égalité est une troncature. On obtient ainsi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x - 3x^3 + \frac{3x^5}{2} + o(x^6) - 1 = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5).$$

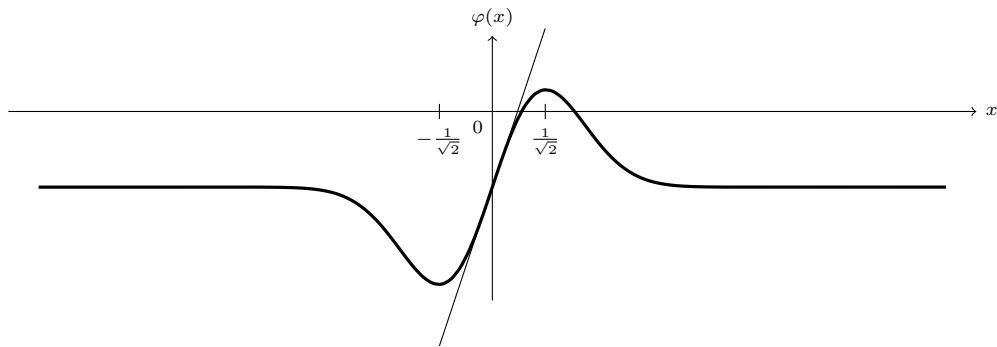
4. Avec le développement limité de f (d'ordre au moins 1), $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point de coordonnées $(0, -1)$ d'équation $y = -1 + 3x$. De plus, pour x au voisinage de 0,

$$f(x) - (-1 + 3x) \sim -3x^3$$

qui est du signe opposé à x . Il en découle que

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0 à gauche de 0 et sous sa tangente en 0 à droite qu'elle traverse.

5. Avec les questions précédentes, on obtient une allure de la courbe



6. On résout d'abord l'équation homogène $xy' - (n - 2x^2)y = 0$ sur $]0, +\infty[$ qui s'écrit,

$$y' - \left(\frac{n}{x} - 2x\right)y = 0.$$

Or, une primitive de $x \mapsto n/x - 2x$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto n \ln x - x^2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$y_H : x \mapsto C_1 \exp(n \ln x - x^2) = C_1 x^n e^{-x^2} \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}.$$

Avec un raisonnement analogue, l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $] -\infty, 0[$ est constitué des fonctions $y_H : x \mapsto C_2 x^n e^{-x^2}$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

7. Il est clair que la fonction constante égale à -1 est une solution particulière de l'équation. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation complète sur $]0, +\infty[$ ou sur $] -\infty, 0[$ est constitué des fonctions de la forme

$$y : x \mapsto C_i x^n e^{-x^2} - 1 \quad \text{où } C_i \in \mathbb{R}$$

où les constantes C_1 et C_2 peuvent être différentes sur chaque intervalle.

8. *Premier cas : $n = 1$.* Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse

Soit f une solution de l'équation différentielle (E_1) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est solution de (E_1) en 0, sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On a donc

$$0 \times f'(0) + (1 - 2 \times 0^2)f(0) = 1 - 2 \times 0^2.$$

Ainsi, avec la question précédente :

$$f(x) = \begin{cases} C_1 x e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2 x e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes. Ainsi, on a, lorsque $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \begin{cases} C_1(1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ C_2(1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = C_1(1 - 2x^2)e^{-x^2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = C_2(1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Par définition, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f' est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$C_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = C_1.$$

En posant $C = C_1 = C_2$, la fonction f est donc de la forme

$$f : x \mapsto C x e^{-x^2} - 1$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante (la valeur en 0 est bien couverte par cette expression).

Synthèse

En posant

$$f : x \mapsto C x e^{-x^2} - 1$$

où $C \in \mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition.

En conclusion, dans ce cas, les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{f : x \mapsto C x e^{-x^2} - 1 \text{ où } C \in \mathbb{R}.}$$

Deuxième cas : $n \geq 2$. Raisonsnons par analyse-synthèse. Analyse Soit f une solution de l'équation différentielle (E_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme dans le cas précédent, on a :

$$f(x) = \begin{cases} C_1 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

Synthèse

Posons

$$f(x) = \begin{cases} C_1 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes. La fonction f tend vers -1 en 0 ce qui assure sa continuité. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = C_1 x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = C_2 x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$ ce qui donne également le fait que f' tend vers 0 en 0. Par le théorème de limite de la dérivée, la fonction f ainsi posée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, dans ce cas, les solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} C_1 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2 x^n e^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

9. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : f'_n(x) = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$ qui est du signe de $n - 2x^2$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0, \sqrt{n/2}[$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$ et continue sur ces deux intervalles. De plus $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = 3/e - 1 > 0$ et la limite de f en $+\infty$ est $-1 < 0$. Par le théorème de la bijection,

f_n s'annule une et une seule fois sur chaque intervalle $[0, \sqrt{n/2}[$ et $[\sqrt{n/2}, +\infty[$ et on note $0 < u_n < 1 < v_n$ ces deux points d'annulation.

10. Avec la question précédente, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sqrt{n/2} \leq v_n$$

et comme $(\sqrt{n/2})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, par minoration, la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$.

11. On a, pour tout entier $n \geq 2$, $e^{-u_n^2} = 1/(3u_n)^n$ donc :

$$f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = \frac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0.$$

12. Comme f_{n+1} est strictement croissante et que $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, on a $u_n < u_{n+1}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante. Comme elle est majorée par 1, $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

13. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g_n(t) = 0 \iff e^{g_n(t)} - 1 = 0 \iff 3t^n e^{-t^2} - 1 = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

14. Comme la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et que $u_2 > 0$, $\ell \leq u_2 > 0$. Ainsi $\ell \in]0, 1]$. Supposons que $\ell \in]0, 1[$. Dans ce cas, on a $\ln \ell < 0$ donc

$$n \ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par conséquent, $0 = g_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ ce qui est absurde. En conclusion, $\ell = 1$.

15. Avec la question précédente, $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $g_n(u_n) = 0$, on a :

$$n \ln(1 + w_n) = u_n^2 - \ln 3.$$

Or $n \ln(1 + w_n) \sim n w_n$ et $u_n^2 - \ln 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \ln 3$. En conclusion :

$$w_n \sim \frac{1 - \ln 3}{n}.$$