

DS6

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,2,4 des exercices 3,5.

Exercice DS6.1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{e^x - 1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts. Montrer que la famille formée par les fonctions

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha_1 x}, f_2 : x \mapsto e^{\alpha_2 x}, \dots, f_n : x \mapsto e^{\alpha_n x}$$

est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Une usine confie la livraison de ses articles aux clients à un transporteur. On suppose que :
 - si le transporteur n'a pas d'accident, l'article parvient au client en bon état dans neuf cas sur dix ;
 - si le transporteur a un accident, l'article parvient au client en bon état dans trois cas sur dix ;
 - le transporteur a un accident dans deux trajets sur dix.

Un client reçoit un article en mauvais état. Quelle est la probabilité que le transporteur ait eu un accident durant le trajet ?

Exercice DS6.2.

Dans tout l'exercice, on travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (0, 1, 0, 1), f_1 = (2, 1, 0, 0), f_2 = (0, 0, 1, 2)$$

ainsi que les ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in E : x - 2y = 0 \text{ et } 2z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

- 1.1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
1.2. Donner une base de G et montrer que la famille (f_1, f_2) est une base de F .
- 2.1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $\lambda e_1 + \mu e_2 \in F$, alors $\lambda = \mu = 0$.
2.2. En déduire l'ensemble $F \cap G$.
- 3.1. Montrer que la famille (e_1, e_2, f_1, f_2) est une base de E .
3.2. En déduire que tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
- Déduire des questions précédentes que F et G sont deux espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice DS6.3.

Un joueur souhaite acheter une voiture de luxe au-dessus de ses moyens et pour cela il se rend au casino. Le prix de la voiture correspond à $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ jetons et le joueur reçoit une mise initiale de $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ jetons.

Il joue à un jeu où la probabilité qu'il gagne un jeton est $p \in]0, 1[$, $p \neq 1/2$ et la probabilité qu'il perde un jeton est $1 - p$. Il joue plusieurs fois, de manière indépendante, à ce jeu.

Le jeu se termine soit par la ruine du joueur, dès qu'il n'a plus de jeton (il n'y a donc aucun lancer si $n = 0$), soit par sa victoire, dès qu'il a obtenu N jetons.

On notera u_n la probabilité que le joueur soit ruiné avec une mise initiale de n jetons.

- Déterminer u_0 et u_N .
- On suppose ici que $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$. On considère les événements E_n : « le joueur est ruiné avec une mise initiale de n jetons » et G_1 : « le premier jeu est gagné ». Justifier que pour tout $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$,

$$P(E_n | G_1) = u_{n+1}.$$

3. En utilisant notamment la question précédente, montrer que pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$:

$$u_n = p u_{n+1} + (1-p) u_{n-1}.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1 - \frac{x^n - 1}{x^N - 1} \quad \text{où} \quad x = \frac{1-p}{p}.$$

5. Donner, lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, un équivalent simple en 1 de $x \mapsto x^k - 1$.

6. En déduire la limite de u_n (qui dépend de x) lorsque x tend vers 1. Interpréter le résultat (on remarquera que la limite lorsque x tend vers 1 correspond à la limite lorsque p tend vers 1/2).

Exercice DS6.4.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Étant donnée une matrice carrée A de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{E}_A$ l'ensemble des combinaisons linéaires des puissances de A , *i.e.*

$$\mathcal{E}_A = \left\{ \sum_{k=0}^p a_k A^k : p \in \mathbb{N}, (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1} \right\};$$

les éléments de $\mathcal{E}_A$ sont appelés les *polynômes en A* .

1. Montrer que $\mathcal{E}_A$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

L'objectif de l'exercice est de déterminer une base de $\mathcal{E}_A$ dans certains cas particuliers.

Partie A : un cas particulier en taille 3

Dans cette partie, on suppose que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculer M^2 et M^3 .

3. Donner une expression simple de A en fonction de I_3 et M .

4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} : \exists (u_k, v_k, w_k) \in \mathbb{K}^3, A^k = u_k I_3 + v_k M + w_k M^2$.

5. Montrer que (I_3, M, M^2) est une base de $\mathcal{E}_A$.

Partie B : un cas plus général en taille quelconque

Dans cette partie, les matrices considérées sont dans $M_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$ est un entier naturel quelconque. On suppose qu'il existe une matrice N non nulle, un entier naturel $p \geq 2$ et un scalaire $\mu \neq 0$ tel que :

$$A = \mu I_n + N \quad \text{et} \quad N^p = 0_n$$

où 0_n est la matrice nulle en taille n .

6. Justifier que l'ensemble $\{j \in \mathbb{N} : N^j = 0_n\}$ admet un plus petit élément, et que cet élément est supérieur ou égal à 2. On le note q .

Ainsi, l'entier naturel q vérifie

$$N \neq 0_n, N^2 \neq 0_n, \dots, N^{q-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad N^q = 0_n.$$

7. 7.1. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \lambda_2 N^2 + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1} = 0_n.$$

À quoi est égale la matrice $N^{q-1} \cdot (\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{q-1} N^{q-1})$?

7.2. Montrer que la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{q-1})$ est libre dans $M_n(\mathbb{K})$.

8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est une combinaison linéaire des matrices $I_n, N, N^2, \dots, N^{q-1}$.

9. Montrer que la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{q-1})$ est une base de $\mathcal{E}_A$.

Exercice DS6.5.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x \exp(-x^2) - 1$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f . Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe de f .
2. Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?
3. Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.
4. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ (on fera apparaître la tangente en 0).

Partie II : Étude d'une équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (E_n) l'équation différentielle (où y est la fonction inconnue et x la variable) :

$$xy' + (n - 2x^2)y = n - 2x^2$$

On notera aussi (H_n) l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E_n) .

6. Résoudre (H_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
7. En déduire les solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
8. Donner toutes les fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

Partie III : Étude de deux suites

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2 et on pose :

$$f_n : x \mapsto 3x^n \exp(-x^2) - 1.$$

9. Justifier l'existence et l'unicité de réels u_n et v_n vérifiant $0 \leq u_n < 1 < v_n$ tel que $f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0$.
10. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite de la suite (v_n) .
11. Déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
12. Justifier que la suite (u_n) est convergente (on commencera par étudier sa monotonie avec la question précédente). On note, dans la suite, $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$.

13. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(t) = 0 \iff g_n(t) = 0$.
14. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
15. Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier $n \geq 2$ par : $w_n = u_n - 1$. Déterminer un équivalent simple de (w_n) .