

Corrigé du DS5

Exercice DS5.1.

1. La fonction $\arctan$ est dérivable en 0 et $\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$ donc le taux d'accroissement en 0 de la fonction $\arctan$ admet pour limite 1 c'est-à-dire

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

2. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{2}y + \frac{9}{16} = 0 \iff (x+1)^2 - 1 + (y+1/4)^2 - \frac{1}{16} + 9/16 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+1/4)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ainsi l'ensemble des points M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{2}y + \frac{9}{16} = 0$ est un

cercle de centre A de coordonnées $(-1, -1/4)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice DS5.2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie en x si et seulement si $\ln x$ est défini, ce qui impose que $x > 0$, et $1/(1-x)$ est défini, ce qui impose $x \neq 1$. En fin de compte, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. De plus, l'identité, le logarithme et la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition respectifs, donc leur quotient l'est là où il est défini : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$.
2. — Commençons par la limite de f en 0. On a

$$x \ln x = -\frac{1}{1/x} \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\ln y}{y}$$

où l'on a posé $y = 1/x$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Par croissances comparées,

$$\frac{\ln y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0.$$

Par passage à l'inverse, $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Enfin, par quotient de limites, et puisque $1/(1-x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- Étudions maintenant la limite de f en 1. On a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1-x} = -x \cdot \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}.$$

On reconnaît dans cette fraction le taux d'accroissement du logarithme népérien entre x et 1. Ainsi, par définition du nombre dérivé,

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Par produit de limites, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$.

- Enfin, on a pour tout $x > 1$:

$$f(x) = -\frac{x}{x-1} \ln x.$$

La fraction ci-dessus a pour limite 1 en $+\infty$. Par produit de limites, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

En particulier, le fait que f admette des limites réelles en 0 et en 1 assure qu'elle est prolongeable par continuité en ces points : f admet un prolongement continu à $\mathbb{R}_+$.

3. D'après le résultat de la question 1, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. De plus, en appliquant la formule du dérivé d'un quotient et d'un produit :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(1 - x) + x \ln x}{(1 - x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x \ln x - x + x \ln x}{(1 - x)^2}$$

soit après simplification : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{\ln x}{1 - x} - \frac{1}{1 - x}}$.

4. On calcule le taux d'accroissement de f entre 0 et un réel $x > 0$:

$$\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{1 - x}.$$

Par quotient de limites, ce taux d'accroissement tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow 0$. En conclusion,

$\boxed{\text{le prolongement par continuité de } f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée et observer que $f' \xrightarrow[0]{} -\infty$.

Exercice DS5.3.

Dans tout cet exercice, on note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de l'espace.

1. On a $M \in \mathcal{S} \iff \Omega M = 13 \iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} = 13 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 13^2$.

$$\boxed{\text{La sphère } \mathcal{S} \text{ a pour équation : } (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 13^2}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 3 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-5 & 3 \\ z-3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (en développant par rapport à la seconde colonne)} \\ &\iff -4x - 3z + 29 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ a pour équation : } -4x - 3z + 29 = 0.}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} M \in (A\Omega) &\iff \exists t \in \mathbb{R}, M = \Omega + t\overrightarrow{\Omega A} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 \\ -3x + 4z = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_1 \\ &\iff \begin{cases} y = 1 \\ -3x + 4z + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{(A\Omega) \text{ admet pour représentation paramétrique } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases} \text{ et pour équation } \begin{cases} y = 1 \\ -3x + 4z + 3 = 0 \end{cases} .}$$

4. On a directement $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, ce qui prouve que $\overrightarrow{A\Omega}$ est normal à $\mathcal{P}$ et donne le résultat.

$$\boxed{(A\Omega) \text{ est perpendiculaire à } \mathcal{P} .}$$

Si H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, on a d'une part $H \in \mathcal{P}$, et d'autre part $\overrightarrow{\Omega H}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc $H \in (A\Omega)$. On en déduit $H \in (A\Omega) \cap \mathcal{P}$, et comme $A \in \mathcal{P}$ il vient $A = H$.

$$\boxed{H(5, 1, 3)}$$

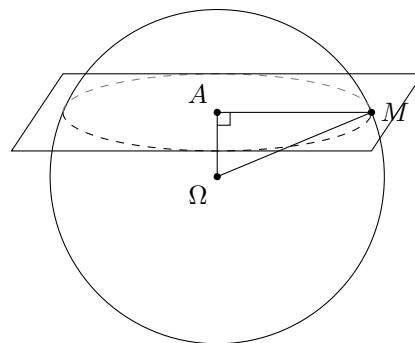
5. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. La droite $(A\Omega)$ est sécante à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et elle leur est orthogonale car $H = A$ (H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$). Ainsi $(A\Omega)$ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et on a donné une équation cartésienne de cette droite précédemment.
6. On a déjà $d(\Omega, \mathcal{P}) = \Omega H = \Omega A = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (3-1)^2} = 5$. Et comme $5 < 13$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle (contenu dans le plan $\mathcal{P}$).

Soit alors $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$. On déduit de la question 4 que le triangle ΩAM est rectangle en A car $M \in \mathcal{P}$, d'où par le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = \Omega M^2 - \Omega A^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2.$$

On en déduit $AM = 12$, ce qui prouve que tous les points de $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ sont à une distance 12 de A , et comme cet ensemble est un cercle on en déduit qu'il s'agit d'un cercle de centre A et de rayon 12.

$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de centre A et de rayon 12.



Exercice DS5.4.

- La fonction $x \mapsto -x(1+t^2)$ est une fonction affine, et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
— La fonction exponentielle est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $x \mapsto e^{-t(1+x^2)}$ l'est également.
— Enfin, $\frac{1}{1+t^2}$ est (par rapport à x) une constante non nulle.

Ceci montre que f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrons par récurrence que la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}, f_t^{(n)}(x) = (-1)^n (1+t^2)^{n-1} e^{-x(1+t^2)} \gg$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— *Initialisation.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_t(x) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = (-1)^0 (1+t^2)^{-1} e^{-x(1+t^2)}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors par hypothèse de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_t^{(n)}(x) = (-1)^n (1+t^2)^{n-1} e^{-x(1+t^2)}.$$

D'après la question 1, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on peut donc dériver la relation précédente sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_t^{(n+1)}(x) &= (-1)^n (1+t^2)^{n-1} \cdot \frac{d}{dx} [e^{-x(1+t^2)}] \\ &= (-1)^n (1+t^2)^{n-1} \cdot [- (1+t^2)] e^{-x(1+t^2)} \\ &= (-1)^{n+1} (1+t^2)^n e^{-x(1+t^2)}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_t^{(n)}(x) = (-1)^n (1+t^2)^{n-1} e^{-x(1+t^2)}.$$

- D'après le résultat de la question précédente appliqué avec $n = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_t'(x) = -e^{-x(1+t^2)} \text{ et } f_t''(x) = (1+t^2)e^{-x(1+t^2)}.$$

De plus, pour tout $x \geq 0$, on a $-x(1+t^2) \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, qui est aussi (strictement) positive sur $\mathbb{R}$, il vient

$$0 \leq e^{-x(1+t^2)} \leq 1.$$

Par passage à l'opposé, ceci équivaut à $\boxed{-1 \leq f'_t(x) \leq 0}$. Par ailleurs, en multipliant par $1 + t^2$ qui est strictement positif, on obtient

$$0 \leq (1 + t^2)e^{-x(1+t^2)} \leq 1 + t^2$$

soit $\boxed{0 \leq f''_t(x) \leq 1 + t^2}$.

4. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x_1 \leq x_2$. La fonction f_t est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur l'intervalle $]x_1, x_2[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f_t(x_2) - f_t(x_1) = (x_2 - x_1)f'_t(c).$$

D'après la question précédente, on a $-1 \leq f'_t(c) \leq 0$, et l'on peut multiplier cette inégalité par $(x_2 - x_1)$ qui est positif : ceci donne

$$-(x_2 - x_1) \leq (x_2 - x_1)f'_t(c) \leq 0$$

ce qui donne le résultat voulu : $\boxed{(x_2 - x_1) \leq f_t(x_2) - f_t(x_1) \leq 0}$.

5. On a par définition de ϕ :

$$\phi(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t \right]_{t=0}^1$$

soit $\boxed{\phi(0) = \frac{\pi}{4}}$.

6. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$x(1 + t^2) = x + xt^2 \geq x \quad \text{donc} \quad -x(1 + t^2) \leq -x.$$

par croissance et positivité de la fonction exponentielle, on a

$$0 \leq e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x}.$$

En divisant par $(1 + t^2)$, qui est strictement positif, puis en intégrant cette inégalité par rapport à la variable t sur $[0, 1]$, il vient

$$\forall x \geq 0, 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right) \cdot e^{-x}.$$

L'intégrale dans le membre de droite ci-dessus a déjà été calculée à la question précédente et vaut $\frac{\pi}{4}$. On conclut :

$$\boxed{\forall x \geq 0, 0 \leq \phi(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}}.$$

Il vient immédiatement par encadrement que $\boxed{\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$.

7. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x_1 \leq x_2$. On sait d'après la question 4 que

$$\forall t \in [0, 1], -(x_2 - x_1) \leq f_t(x_2) - f_t(x_1) \leq 0.$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale, il en résulte que

$$-\int_0^1 (x_2 - x_1) dt \leq \int_0^1 f_t(x_2) dt - \int_0^1 f_t(x_1) dt \leq 0.$$

Par définition de ϕ , le membre du milieu dans l'inégalité ci-dessus vaut $\phi(x_2) - \phi(x_1)$. De plus, dans le membre de gauche, la fonction intégrée est constante par rapport à la variable t , donc il vaut $-(x_2 - x_1)$. La conclusion suit :

$$\boxed{-(x_2 - x_1) \leq \phi(x_2) - \phi(x_1) \leq 0}.$$

8. Montrons que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; étudions la continuité de ϕ en x . On a pour tout $y \geq x$:

$$-(y - x) \leq \phi(y) - \phi(x) \leq 0.$$

Par encadrement, on en déduit :

$$\lim_{y \rightarrow x^+} (\phi(y) - \phi(x)) = 0 \quad \text{soit} \quad \phi \xrightarrow{x^+} \phi(x).$$

Si $y \leq x$, on a cette fois-ci

$$0 \leq \phi(x) - \phi(y) \leq x - y$$

et on en déduit là encore par encadrement que $\phi(y) \xrightarrow{y \rightarrow x^-} \phi(x)$. Ainsi, ϕ tend bien vers $\phi(x)$ à droite et à

gauche en x . On en déduit que ϕ est continue en x , et ceci est valable pour tout réel x : ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin, il résulte immédiatement de la question précédente que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \quad (0 \leq x_1 \leq x_2 \implies \phi(x_2) \leq \phi(x_1));$$

autrement dit, ϕ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

9. La fonction h_λ est obtenue à partir de polynômes et de g et g' par somme et produit. Puisque g et g' sont toutes deux dérivables sur $]a, b[$, h_λ est dérivable sur $]a, b[$. On a alors pour tout $x \in]a, b[$:

$$h'_\lambda(x) = -g'(x) - (g''(x)(b-x) - g'(x)) + \lambda(b-x)$$

soit $h'_\lambda(x) = (\lambda - g''(x))(b-x)$.

10. On a :

$$h_\lambda(a) = (g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)) - \frac{\lambda}{2}(b-a)^2.$$

Ceci est nul si et seulement si

$$\frac{\lambda}{2}(b-a)^2 = g(b) - g(a) - g'(a)(b-a) \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{2(g(b) - g(a) - g'(a)(b-a))}{(b-a)^2},$$

la dernière étape étant valable car $a \neq b$. On obtient bien le résultat souhaité :

$$\text{Il existe un unique réel } \lambda \text{ tel que } h_\lambda(a) = 0.$$

11. On a alors $h_\lambda(a) = 0$ d'après la question précédente, et l'expression de h_λ donne immédiatement $h_\lambda(b) = 0$. Ainsi :

- h_λ est continue sur $[a, b]$ (car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$) ;
- h_λ est dérivable sur $]a, b[$ d'après la question 9 ;
- $h_\lambda(a) = h_\lambda(b) = 0$.

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à h_λ : il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'_\lambda(c) = 0$. La conclusion suit immédiatement d'après l'expression de h'_λ déterminée à la question 9 :

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } \lambda = g''(c).$$

12. On suit l'énoncé et on remplace λ par $g''(c)$ dans l'expression de $h_\lambda(a)$:

$$h_\lambda(a) = g(b) - g(a) - g'(a)(b-a) - \frac{g''(c)}{2}(b-a)^2.$$

En isolant $g(b)$ dans l'égalité « $h_\lambda(a) = 0$ », on aboutit bien à l'égalité demandée :

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \frac{g''(c)}{2}(b-a)^2.$$

13. Si g'' est minroée par m et majorée par M sur $]a, b[$, alors, puisque $(b-a)^2/2$ est positif,

$$\frac{m}{2}(b-a)^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}g''(c) \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

De plus l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 montre que

$$\frac{(b-a)^2}{2} g''(c) = g(b) - (g(a) + g'(a)(b-a))$$

ce qui entraîne le résultat :

$$\boxed{\frac{m}{2}(b-a)^2 \leq g(b) - (g(a) + g'(a)(b-a)) \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.}$$

14. D'après la question 3, on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$0 \leq f_t'' \leq 1 + t^2 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question 13 avec $a = x_1$, $b = x_2$, $m = 0$ et $M = 1 + t^2$, ce qui donne

$$0 \leq f_t(x_2) - f_t(x_1) - (x_2 - x_1)f_t'(x_1) \leq \frac{1+t^2}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité sur $[0, 1]$, ce qui donne par linéarité

$$0 \leq \int_0^1 f_t(x_2) dt - \int_0^1 f_t(x_1) dt - (x_2 - x_1) \int_0^1 f_t'(x_1) dt \leq (x_2 - x_1) \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} dt.$$

On se sert alors des égalités suivantes :

$$\int_0^1 f_t(x_1) dt = \phi(x_1) \quad \text{et idem avec } x_2,$$

$$\int_0^1 f_t'(x_1) dt = - \int_0^1 e^{-x_1(1+t^2)} dt \quad \text{d'après la question 2,}$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} \right]_{t=0}^1 = \frac{2}{3}$$

pour obtenir l'encadrement voulu :

$$\boxed{0 \leq \phi(x_2) - \phi(x_1) + (x_2 - x_1) \int_0^1 e^{-x_1(1+t^2)} dt \leq \frac{2}{3}(x_2 - x_1)^2.}$$

15. Soit $x \geq 0$. On étudie dans un premier temps la limite à droite en 0 du taux d'accroissement de ϕ entre x et $x+h$. Pour tout $h > 0$, on applique le résultat de la question précédente avec $x_1 = x$ et $x_2 = x+h$:

$$0 \leq \phi(x+h) - \phi(x) + h \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \leq \frac{2h^2}{3}.$$

En ajoutant aux trois membres le terme $-h \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$ puis en divisant par h , il vient

$$- \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt \leq \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \leq - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt + \frac{2h}{3}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $- \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$ quand $h \rightarrow 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

On obtient la limite à gauche de manière analogue, en appliquant la question précédente entre $x+h$ (avec $h < 0$) et x . En fin de compte, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \phi'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

16. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente, donc par composition, $x \mapsto \phi(x^2)$ l'est également. De plus, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$, par dérivation de produit et de fonction composée, on a

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{d}{dx} [\phi(x^2)] + \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) \right] \\ &= 2x\phi'(x^2) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= 2 \left(-x \cdot \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \\ &= 2 \left(-xe^{-x^2} \cdot \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt + e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \right)\end{aligned}$$

Ainsi, montrer que Φ est constante revient à montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \cdot \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Pour cela, on part du membre de droite ci-dessus, et on effectue le changement de variable « $t = ux$ » (donc « $dt = x du$ ») :

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-(xu)^2} x du = x \cdot \int_0^1 e^{-(xu)^2} du.$$

Les variables d'intégration étant muettes, on en déduit l'égalité cherchée, donc que Φ' est nulle sur $\mathbb{R}_+$. En conclusion, Φ est constante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'intégrale dans la définition de Φ étant nulle si $x = 0$, on a $\Phi(0) = \phi(0) = \pi/4$:

$\Phi \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+ \text{ de valeur } \frac{\pi}{4}.$

17. On a d'après la question précédente, pour tout $x \geq 0$: $\phi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ soit

$$\forall x \geq 0, \left(\int_0^x e^{-t} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} - \phi(x^2)$$

ou encore

$$\forall x \geq 0, \int_0^x e^{-t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - \phi(x^2)}.$$

On a montré à la question 6 que ϕ tend vers 0 en $+\infty$. Il vient immédiatement par composition de limites que le membre de droite ci-dessus a pour limite $\sqrt{\pi/4}$, soit $\sqrt{\pi}/2$, quand $x \rightarrow +\infty$. La conclusion suit :

$\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Exercice DS5.5.

A - Puissance d'un point par rapport à un cercle

1. Soit M un point du plan. On a $P_{\mathcal{C}}(M) = \Omega M^2 - R^2$ donc :
 - $P_{\mathcal{C}}(M) < 0 \iff \Omega M^2 < R^2 \iff \Omega M < R$. Ainsi, $P_{\mathcal{C}}(M) < 0$ si et seulement si M est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$.
 - $P_{\mathcal{C}}(M) = 0 \iff \Omega M^2 = R^2 \iff \Omega M = R$. Ainsi, $P_{\mathcal{C}}(M) = 0$ si et seulement si M est sur le cercle $\mathcal{C}$.
 - $P_{\mathcal{C}}(M) > 0 \iff \Omega M^2 > R^2 \iff \Omega M > R$. Ainsi, $P_{\mathcal{C}}(M) > 0$ si et seulement si M est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$.

2. Pour tout point M du plan, $\Omega M^2 \geq 0$, donc $P_{\mathcal{C}}(M) \geq -R^2$ et $P_{\mathcal{C}}(M) = -R^2 \iff \Omega M^2 = 0 \iff M = \Omega$.

la plus petite valeur possible de $P_{\mathcal{C}}(M)$ est $-R^2$ et elle est atteinte pour $M = \Omega$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$ et M un point du plan. On a : $M \in \mathcal{L}_k \iff P_{\mathcal{C}}(M) = k \iff \Omega M^2 = k + R^2$. On a donc trois cas possibles :
- Si $k < -R^2$, alors $\mathcal{L}_k = \emptyset$.
 - Si $k = -R^2$, alors $\mathcal{L}_k = \{\Omega\}$.
 - Si $k > -R^2$, alors $\mathcal{L}_k$ est le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \sqrt{k + R^2})$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k + R^2}$.

$$\mathcal{L}_k = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k < -R^2 \\ \{\Omega\} & \text{si } k = -R^2 \\ \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{k + R^2}) & \text{si } k > -R^2 \end{cases}$$

Soit M un point du plan et Δ_1 une droite passant par M coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B . Soit A' le point du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point A .

4. On a les égalités

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}}(M) &= \Omega M^2 - R^2 \\ &= \Omega M^2 - \Omega A^2 \\ &= (\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega A}) \\ &= (\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}) \cdot (\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A'\Omega}) \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{A'\Omega} = \overrightarrow{\Omega A}$ ce qui donne :

$$P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'M}$$

5. Le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle $AA'B$ et AA' est un diamètre de $\mathcal{C}$. Ce triangle est donc rectangle en B et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, car A, B et M sont sur une même droite. On a donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$. On obtient ainsi les égalités :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}}(M) &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BM}) \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$$

Soit Δ_2 une droite passant par M et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en un point C .

6. Comme la droite Δ_2 est tangente en C au cercle $\mathcal{C}$, elle est orthogonale à la droite (ΩC) . Le triangle ΩCM est donc rectangle en C , et d'après le théorème de Pythagore :

$$P_{\mathcal{C}}(M) = \Omega M^2 - \Omega C^2 = CM^2 = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM}$$

7. Réciproquement, si $P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM}$, alors $\Omega M^2 = CM^2 + \Omega C^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ΩCM est rectangle en C , ce qui signifie que la droite Δ_2 est tangente en C au cercle $\mathcal{C}$.

B - Cocyclicité

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

8. Les médiatrices des côtés du triangle ABC sont concourantes en un point Ω qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. On peut construire ce cercle en traçant deux médiatrices pour avoir le centre Ω puis le rayon est ΩA .

Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B , et D un point de la droite (IC) .

9. On suppose que $D \in \mathcal{C}$. Dans ce cas, avec la question 4,

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'} = (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OA}) = IO^2 - OA^2 = R^2$$

et de même $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = IO^2 - R^2$. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}}.$$

10. On suppose que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$. D'après la question 5, $\overrightarrow{IB} = IO^2 - R^2 = P_{\mathcal{C}}(I)$. D'après l'hypothèse $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = P_{\mathcal{C}}(I)$. On a, de façon analogue, $P_{\mathcal{C}}(I) = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IC'}$, où C' est le deuxième point d'intersection de (IC) avec le cercle $\mathcal{C}$ ($C = C'$ en cas de tangence). Ainsi, $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IC'}$, et donc, les points I , C , D et C' étant alignés, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IC'}$, ce dont on déduit $D = C'$: le point D appartient bien au cercle $\mathcal{C}$.

C - Application

Dans cette partie, on se place désormais dans le plan complexe. On considère un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et un vecteur $\vec{v}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$.

11. On a la relation :

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}}.$$

12. Avec la question précédente, on a Or, $\|\vec{u}\|^2 = |z|^2$, $\|\vec{v}\|^2 = |z'|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = |z + z'|^2$, donc :

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = |z + z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) - |z|^2 - |z'|^2 = z\overline{z'} + z'\overline{z} = z\overline{z'} + \overline{z'}\overline{z} = 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}),$$

et finalement :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z\overline{z'})}.$$

13. Les droites (AB) et (CD) ont pour équations cartésiennes respectives $-2x + y - 5 = 0$ et $-x + 3y + 20 = 0$. En résolvant le système composé de ces deux équations, on trouve que la point d'intersection de (AB) et (CD) , noté I , a pour coordonnées $(-7, -9)$ c'est-à-dire pour affixe $z_I = -7 - 9i$. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ ont respectivement pour affixes $4 + 8i = 4(1 + 2i)$, $7 + 14i = 7(1 + 2i)$, $6 + 2i = 2(3 + i)$ et $21 + 7i = 7(3 + i)$. On a :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 28|1 + 2i|^2 = 140, \quad \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = 14|3 + i|^2 = 140.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la question 10 pour déduire de ce qui précède que le point D appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) , donc les points A , B , C et D sont cocycliques.