

DS5

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,3,5 des exercices 2,4.

Exercice DS5.1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer, la limite, si elle existe de $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}$ en 0.
2. On se place dans un repère orthonormal du plan affine. Déterminer la nature de l'ensemble des points M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{2}y + \frac{9}{16} = 0.$$

Exercice DS5.2.

Dans cette question, on considère la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité? Si oui, en quels points?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
4. Le prolongement obtenu à la question 2 est-il dérivable en 0?

Exercice DS5.3.

On se place dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace usuel $\mathcal{E}$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1, 1, 0)$ et de rayon $R = 13$.
2. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(5, 1, 3)$ et dirigé par $\vec{u}(0, 1, 0)$ et $\vec{v}(3, 0, -4)$.
3. Donner une paramétrisation et une équation cartésienne de la droite $(A\Omega)$.
4. Vérifier que $(A\Omega)$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{P}$.
5. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par H et dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{D}'$ la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{v}$. Justifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles puis déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
6. Montrer que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon (on justifiera soigneusement sa réponse).

Exercice DS5.4.

Pour tout $t \geq 0$, on note f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_t(x) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

Partie I-A : propriétés élémentaires de f_t

Dans les questions 1 à 4, on fixe un réel $t \in [0, 1]$.

1. Justifier que f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, pour tout entier naturel n , la dérivée n -ième de f_t .
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$-1 \leq f'_t(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq f''_t(x) \leq 1 + t^2.$$

4. En citant précisément le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses, déduire de la question précédente que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq x_1 \leq x_2$,

$$-(x_2 - x_1) \leq f_t(x_2) - f_t(x_1) \leq 0.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la fonction ϕ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_0^1 f_t(x) dt.$$

On notera en particulier que la variable « globale » est x , tandis que la variable d'intégration est t .

Partie I-B : propriétés élémentaires de ϕ

5. Calculer $\phi(0)$.
6. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \phi(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}.$$

La fonction ϕ admet-elle une limite en $+\infty$?

7. À l'aide de la question 4, montrer que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq x_1 \leq x_2$,

$$-(x_2 - x_1) \leq \phi(x_2) - \phi(x_1) \leq 0.$$

8. En déduire que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Quel est le sens de variations de ϕ ?

Partie II : égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1

Cette partie est indépendante de la précédente.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant, appelé *égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1* : pour toute fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + \frac{g''(c)}{2}(b-a)^2.$$

On fixe donc une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note alors h_λ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad h_\lambda(x) = g(b) - g(x) - g'(x)(b-x) - \frac{\lambda}{2}(b-x)^2.$$

9. Montrer que h_λ est dérivable sur $]a, b[$ de dérivée

$$h'_\lambda : x \in]a, b[\mapsto (\lambda - g''(x))(b-x).$$

10. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h_\lambda(a) = 0$. Dans la suite, on supposera que λ est égal à cette valeur.
11. Que valent alors $h_\lambda(a)$ et $h_\lambda(b)$? En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\lambda = g''(c)$. On citera précisément le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses.
12. En remplaçant λ par $g''(c)$ dans l'égalité « $h_\lambda(a) = 0$ », montrer l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
13. En déduire que, s'il existe de plus $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in]a, b[, \quad m \leq g''(x) \leq M$$

alors

$$\frac{m}{2}(b-a)^2 \leq g(b) - \left(g(a) + g'(a)(b-a)\right) \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

Partie III : étude de la dérivabilité de ϕ et applications

14. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < x_2$. À l'aide des questions 3 et 13, montrer que

$$0 \leq \phi(x_2) - \phi(x_1) + (x_2 - x_1) \int_0^1 e^{-x_1(1+t^2)} dt \leq \frac{2}{3}(x_2 - x_1)^2.$$

15. En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \geq 0, \phi'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

On pourra, pour tout $x \geq 0$, étudier la limite du taux d'accroissement $(\phi(x+h) - \phi(x))/h$ quand h tend vers 0 à droite et à gauche.

16. Montrer que la fonction :

$$\Phi : x \mapsto \phi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

est constante sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est sa valeur ?

Indication : on sera amené à effectuer le changement de variable « $u = tx$ » (bien noter que t est la variable d'intégration !).

17. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice DS5.5.

Cet exercice comporte 3 parties. On pourra admettre les résultats de la partie A pour répondre aux questions des parties B et C et les questions de la partie B pour répondre à la partie C.

A - Puissance d'un point par rapport à un cercle

On suppose le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R . Pour tout point M du plan, on appelle puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ le nombre réel :

$$P_{\mathcal{C}}(M) = \Omega M^2 - R^2.$$

1. Étudier le signe de $P_{\mathcal{C}}(M)$ selon la position de M par rapport à $\mathcal{C}$.
2. Quelle est la plus petite valeur possible de $P_{\mathcal{C}}(M)$? Déterminer l'ensemble des points M en lesquels cette valeur est atteinte.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{P} \mid P_{\mathcal{C}}(M) = k\}$. On discutera selon les valeurs de k .

Soit M un point du plan et Δ_1 une droite passant par M coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B . Soit A' le point du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point A .

4. Montrer que $P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'M}$.
5. En déduire que $P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

Soit Δ_2 une droite passant par M et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en un point C .

6. Montrer que si Δ_2 est tangente à $\mathcal{C}$, alors $P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM}$.
7. Réciproquement, montrer que si $P_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM}$ et M n'est pas sur $\mathcal{C}$, alors Δ_2 est tangente à $\mathcal{C}$.

B - Cocyclicité

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

8. Justifier que A, B et C appartiennent à un même cercle. Expliquer avec précision comment construire le cercle passant par ces trois points. On note $\mathcal{C}$ ce cercle.

Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B , et D un point de la droite (IC) .

9. On suppose dans cette question que $D \in \mathcal{C}$. Montrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$.
10. On suppose dans cette question que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$. Montrer que $D \in \mathcal{C}$.

C - Application

Dans cette partie, on se place désormais dans le plan complexe. On considère un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et un vecteur $\vec{v}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$.

11. Rappeler la relation entre $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
12. Dédurre de la question précédente que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z\overline{z'})$.
13. Soit A, B, C, D les points d'affixes complexes respectives $z_A = -3-i$, $z_B = 5i$, $z_C = -1-7i$ et $z_D = 14-2i$. Déterminer l'affixe de l'intersection des droites (AB) et (CD) puis montrer que A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire situés sur un même cercle).