

Corrigé du DS4

Exercice DS4.1.

1. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

donc, par composition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si k est un entier naturel qui divise n et $n+1$, k divise $n+1-n=1$ donc $k=1$. Ainsi, l'ensemble des diviseurs positifs de n et $n+1$ est $\{1\}$ donc le PGCD de n et $n+1$ est 1. En conclusion, n et $n+1$ sont premiers entre eux.
3. Par définition, il y a $\binom{n}{5}$ tirages possibles. Si on élimine la boule 1, on ne pioche que dans $n-1$ boules et on a donc $\binom{n-1}{5}$ tirages possibles.

Exercice DS4.2.

1. Par imparité du sinus hyperbolique, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sh } x}{-x} = f(x).$$

On obtient donc $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x non nul, et c'est bien entendu également vrai si $x=0$. Ainsi, f est paire.

2. Pour tout $x_0 \neq 0$, la fonction f coïncide sur un voisinage de x_0 avec la fonction $x \mapsto \text{sh } x/x$, qui est continue sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions continues : ainsi, f est continue en tout réel $x_0 \neq 0$. Reste à vérifier que f est continue en 0, i.e. que $f(x)$ a pour limite 1 quand $x \rightarrow 0$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\text{sh } x}{x} = \frac{\text{sh } x - 0}{x - 0}.$$

On reconnaît ici le taux d'accroissement du sinus hyperbolique entre 0 et x . La limite de ce taux d'accroissement est égale à $\text{sh}' 0$, donc à $\text{ch } 0$, donc à 1. Ainsi :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$$

et f est donc bien continue en 0. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On pose pour tout $x \geq 0$: $h(x) = x \text{ch } x - \text{sh } x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle s'obtient comme produit puis sommes de fonctions ch , sh et de l'identité qui sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on a pour tout $x \geq 0$:

$$h'(x) = \text{ch } x + x \text{ch}' x - \text{sh}' x = \text{ch } x + x \text{sh } x - \text{ch } x = x \text{sh } x > 0.$$

Ainsi h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$h(0) = 0 \text{ch } 0 - \text{sh } 0 = 0.$$

Par conséquent h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x > 0, x \text{ch } x - \text{sh } x > 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et l'on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\text{sh}' x \cdot x - \text{sh } x}{x} = \frac{x \text{ch } x - \text{sh } x}{x} > 0.$$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{x}.$$

Le premier terme ci-dessus a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ par croissances comparées, et le second tend vers 0 en $+\infty$. Par opérations sur les limites, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. En exploitant la continuité de f en 0, on en déduit son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$, que l'on complète à $\mathbb{R}$ par parité :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

4. 4.1. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'ensemble $f(\mathbb{R}_+^*)$ est un intervalle ; de plus, du fait que $f(0) = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, on déduit que cet intervalle contient $]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)/n$ est strictement supérieur à 1, donc admet au moins un antécédent par f . De plus, f étant strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y est injective, ce qui entraîne que cet antécédent est unique. En résumé,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet
une unique solution strictement positive.

- 4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $x_n \leq x_{n+1}$. La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci entraîne $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$. Par définition de x_n et x_{n+1} ,

$$f(x_n) = \frac{n+1}{n} \quad \text{et} \quad f(x_{n+1}) = \frac{n+2}{n+1}.$$

Ainsi,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

On obtient donc $f(x_{n+1}) - f(x_n) < 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$: l'hypothèse de départ « $x_n \leq x_{n+1}$ » est donc fautive. Ainsi, on a l'inégalité $x_n > x_{n+1}$, et ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: autrement dit, la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante. Puisqu'elle est de plus formée de réels positifs, la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel $l \geq 0$.

- 4.3. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(l)$; de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = (n+1)/n$. Par passage à la limite, on obtient $f(l) = 1$. Or, d'après le tableau de variations obtenu à la question 3, le seul antécédent de l par f est 0. Par conséquent, $l = 0$.

Exercice DS4.3.

1. On peut réécrire le système (S_m) sous forme matricielle $A_m X = B$ où

$$A_m = \begin{pmatrix} (1-m) & 2 & -1 \\ -2 & -(3+m) & 3 \\ 1 & 1 & -(2+m) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. On effectue les opérations élémentaires $L_1 \longleftrightarrow L_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_1$ ce qui donne

$$A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ -2 & -(3+m) & 3 \\ (1-m) & 2 & -(2+m) \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) \\ 0 & 1+m & -1+(2+m)(1-m) \end{pmatrix}$$

puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient

$$A_m \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+m) \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) \\ 0 & 0 & 1-m-m^2-1-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m \\ 0 & -1-m & -1-2m \\ 0 & 0 & -3m-m^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_m est équivalente à une matrice échelonnée triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont 1 , $-(1+m)$ et $-3m-m^2$. La matrice A_m est inversible si et seulement si ces trois coefficients sont non nuls.

Finalemment, la matrice A_m est inversible si et seulement si : $-(1+m) \neq 0$ et $-3m-m^2 \neq 0$.

3. Lorsque $m \notin \{-3, -1, 0\}$, la matrice A_m est inversible et dans ce cas, le système homogène (S_m) admet une unique solution : $(0, 0, 0)$.
4. Lorsque $m = 0$, avec la question 2, on a

$$(S_0) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases}$$

dont les inconnues principales sont x et y et l'inconnue secondaire z . L'ensemble des solutions du système (S_0) s'écrit $\mathcal{S}_0 = \{(3z, -z, z) | z \in \mathbb{R}\}$. De façon analogue, l'ensemble des solutions du système (S_{-3}) s'écrit $\mathcal{S}_{-3} = \{(-\frac{5}{2}z, \frac{3}{2}z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

5. Lorsque $m = -1$, avec la question 2, on a

$$(S_0) \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (S_{-1}) s'écrit $\mathcal{S}_{-1} = \{(-y, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}$.

6. On suppose que $m \notin \{0, -1, -3\}$. On a :

$$\begin{aligned} (A_m | I_3) & \xrightarrow[L]{L_1 \leftarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -(2+m) & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -(3+m) & -(1+2m) & 0 & 1 & 0 \\ (1-m) & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -(2+m) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) & 0 & 1 & 2 \\ (1-m) & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L]{L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -(2+m) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1+m & -1+(2+m)(1-m) & 1 & 0 & m-1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -(2+m) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3m-m^2 & 1 & 1 & m+1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L]{L_3 \leftarrow L_3 / (-3m-m^2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -(2+m) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+m) & -(1+2m) & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-(m+1)}{m(3+m)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On élimine ensuite les coefficients de la dernière colonne en effectuant les opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow L_2 + (1+2m)L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + (2+m)L_3$ pour obtenir :

$$(A_m | I_3) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+m) & 0 & \frac{-(2m+1)}{m(3+m)} & \frac{m^2+m-1}{m(3+m)} & \frac{-1+3m}{m(3+m)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-(m+1)}{m(3+m)} \end{array} \right)$$

ce qui donne en effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 / (-m-1)$:

$$(A_m | I_3) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2m+1}{m(3+m)(m+1)} & \frac{-m^2-m+1}{m(3+m)(m+1)} & \frac{1-3m}{m(3+m)(m+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-(m+1)}{m(3+m)} \end{array} \right)$$

Il reste à effectuer $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ pour obtenir

$$(A_m | I_3) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{-m^2-5m-3}{m(3+m)(m+1)} & \frac{-2m-3}{m(3+m)(m+1)} & \frac{m-3}{m(3+m)(m+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2m+1}{m(3+m)(m+1)} & \frac{-m^2-m+1}{m(3+m)(m+1)} & \frac{1-3m}{m(3+m)(m+1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-1}{m(3+m)} & \frac{-(m+1)}{m(3+m)} \end{array} \right)$$

En conclusion, on a

$$A_m^{-1} = \frac{1}{m(3+m)(m+1)} \begin{pmatrix} -m^2 - 5m - 3 & -2m - 3 & m - 3 \\ 2m + 1 & -m^2 - m + 1 & 1 - 3m \\ -(m+1) & -(m+1) & -(m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Exercice DS4.4.

1. On effectue une récurrence.

- Initialisation : par hypothèse, u_0 est bien défini et appartient à $[0, 1[$, donc en particulier à $[0, \sqrt{2}]$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n soit bien défini et appartienne à $[0, \sqrt{2}]$. Alors, en particulier, $u_n \in [0, 2]$ donc $2 - u_n \geq 0$: ainsi, $\sqrt{2 - u_n}$ est bien défini, et u_{n+1} est donc bien défini. De plus on a les implications :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 2 &\implies -2 \leq -u_n \leq 0 \\ &\implies 0 \leq 2 - u_n \leq 2 \\ &\implies 0 \leq \sqrt{2 - u_n} \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: ainsi, u_{n+1} appartient bien à l'intervalle $[0, \sqrt{2}]$, et la propriété voulue est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0, \sqrt{2}]$.

2. 2.1. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_0 < 1 &\implies -1 < u_0 \leq 0 \\ &\implies 1 < 2 - u_0 \leq 2 \\ &\implies 1 < \sqrt{2 - u_0} \leq 2 \end{aligned}$$

soit $u_1 \in]1, \sqrt{2}]$.

2.2. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_{2n} < 1 < u_{2n+1}$ ». Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- Initialisation : par hypothèse, $u_0 < 1$, et d'après la question précédente, $u_1 > 1$: ainsi, $u_0 < 1 < u_1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_{2n+1} > 1$, et de plus, d'après la question 1, $u_{2n+1} \leq \sqrt{2}$, donc en particulier $u_{n+1} < 2$: alors

$$\begin{aligned} 1 < u_{2n+1} < 2 &\implies -2 < -u_{2n+1} < -1 \\ &\implies 0 < 2 - u_{2n+1} < 1 \\ &\implies 0 < \sqrt{2 - u_{2n+1}} < 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u_{2n+2} < 1$. On a alors de la même façon

$$\begin{aligned} 0 < u_{2n+2} < 1 &\implies -1 < -u_{2n+2} < 0 \\ &\implies 1 < 2 - u_{2n+2} < 2 \\ &\implies 1 < \sqrt{2 - u_{2n+2}} < \sqrt{2} \end{aligned}$$

soit $u_{2n+3} > 1$. On obtient donc $u_{2n+2} < 1 < u_{2n+3}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < 1 < u_{2n+1}$.

2.3. On a $u_{2n} < u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} > u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la première inégalité montre que la suite $(u_n)_n$ n'est décroissante à partir d'aucun rang, et la seconde qu'elle n'est croissante à partir d'aucun rang.

En conclusion, il est impossible que la suite $(u_n)_n$ soit monotone à partir d'un certain rang.

3. 3.1. La fonction $x \mapsto 2 - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est constante de valeur -1 sur cet intervalle, et la racine carrée est strictement croissante sur son intervalle de définition : par conséquent, f est strictement décroissante sur $[0, 2]$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in [0, 2]^2$ tels que $x < y$, on a par décroissance de f :

$$f(x) > f(y) \quad \text{puis} \quad f \circ f(x) < f \circ f(y)$$

ce qui prouve que $f \circ f$ est strictement croissante.

- 3.2. On suppose que $v_0 \leq v_1$; montrons alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$. Cette propriété étant vraie pour $n = 0$ par hypothèse, montrons qu'elle est héréditaire, et soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leq v_{n+1}$. On constate alors que :

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n)$$

et similairement que $v_{n+2} = f \circ f(v_{n+1})$. Or, d'après la question précédente, $f \circ f$ est croissante, et par hypothèse de récurrence $v_n \leq v_{n+1}$: ceci entraîne donc que $v_{n+1} \leq v_{n+2}$.

En fin de compte, on a bien démontré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$. La suite $(v_n)_n$ est donc croissante ; de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \leq \sqrt{2} \text{ d'après la question 1.}$$

La suite $(v_n)_n$ est ainsi croissante et majorée : d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(v_n)_n$ converge.

- 3.3. Si $v_0 > v_1$, alors comme précédemment, on montre par récurrence que $v_n > v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (l'initialisation étant déjà faite, et l'hérédité se montrant en exploitant la croissance stricte de $f \circ f$). Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante : étant minorée par 0 d'après le résultat de la question 1, la suite $(v_n)_n$ converge.
4. D'une part, $y \geq x$ par hypothèse et la racine carrée est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui fournit bien $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$. Montrons l'autre inégalité demandée. On a $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$ donc

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}. \quad (\star)$$

Or, par hypothèse, y et x sont tous deux supérieurs ou égaux à α qui est strictement positif : par croissance de la racine, puis par addition,

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\alpha}$$

Les deux membres étant strictement positifs, on peut passer à l'inverse pour obtenir

$$\frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

En reportant dans $(\star)$ et en utilisant le fait que $y - x \geq 0$, on conclut :

$$0 \leq \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(y - x).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question 1 que u_{2n} et u_{2n+1} sont inférieurs à $[0, \sqrt{2}]$, donc :

$$2 - u_{2n} \geq 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2 - u_{2n+1} \geq 2 - \sqrt{2}.$$

De plus, d'après la question 2.2, on a $u_{2n} < 1 < u_{2n+1}$ d'où l'on déduit

$$2 - u_{2n+1} < 2 - u_{2n}.$$

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente aux réels

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad x = 2 - u_{2n+1} \quad \text{et} \quad y = u_{2n}$$

ce qui donne

$$0 \leq \sqrt{2 - u_{2n}} - \sqrt{2 - u_{2n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \left((2 - u_{2n}) - (2 - u_{2n+1}) \right). \quad (\star\star)$$

On peut remplacer, dans le membre de droite de (★★), la différence $2 - u_{2n} - 2 - u_{2n+1}$ par $u_{2n+1} - u_{2n}$, soit par $w_n - w_n$. D'autre part, on remarque que

$$\sqrt{2 - u_{2n}} = f(u_{2n}) = u_{2n+1} = w_n$$

et $\sqrt{2 - u_{2n+1}} = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}.$

En reportant dans (★★), on obtient l'inégalité voulue :

$$0 \leq w_n - v_{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}(w_n - v_n).$$

6. On a les **équivalences** suivantes (bien noter que toutes les opérations peuvent être effectuées dans les deux sens) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} < 1 &\iff \frac{1}{4 \times (2 - \sqrt{2})} < 1 && \text{car les deux membres sont (strictement) positifs} \\ &\iff 1 < 8 - 4\sqrt{2} && \text{par passage à l'inverse, car tout est strictement positif} \\ &\iff 4\sqrt{2} < 7 \\ &\iff 4^2 \times 2 < 49 && \text{car les deux membres sont strictement positifs.} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie, et toutes les opérations effectuées peuvent l'être dans les deux sens.

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} < 1}.$

7. Par passage à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 5, on obtient

$$0 \leq l' - l \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}(l' - l).$$

Ainsi, $l' - l \geq 0$. Supposons que $l' - l > 0$: en divisant l'inégalité ci-dessus par $l' - l$, on obtient

$$1 \leq \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Ceci est contradictoire avec le résultat de la question 6. En fin de compte, $\boxed{l = l'}.$

8. D'après les résultats des questions précédentes, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers un même réel l . Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ converge vers l . Par passage à la limite dans l'égalité « $u_{n+1} = f(u_n)$ », on obtient

$$l = f(l) \quad \text{i.e.} \quad l = \sqrt{2 - l}.$$

Ceci implique que l soit un réel positif et que $l^2 = 2 - l$ soit $l^2 + l - 2 = 0$. Cette équation du second degré admet deux solutions réelles qui sont -2 et 1 : en éliminant la solution négative, on conclut que $l = 1$. En résumé,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge vers } 1.}$$

Exercice DS4.5.

1. On effectue p tirages simultanés dans une urne contenant n boules distinguables, il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{n}{p} \text{ manières de tirer simultanément } p \text{ boules dans l'urne.}}$$

2. On commence par choisir la boule numéro k , ce qui laisse 1 possibilité. Puis on choisit simultanément $p - 1$ boules parmi les boules de numéro dans $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, ce qui donne $\binom{k-1}{p-1}$ possibilités.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{k-1}{p-1} \text{ manières de tirer simultanément } p \text{ boules de sorte que le plus grand numéro obtenu soit } k.}$$

3. Soit A l'ensemble de tous les tirages (un tirage étant une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ contenant p éléments), et A_k l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est k , pour $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. Montrons $A = \bigcup_{k=p}^n A_k$.

- Si un tirage t est dans $\bigcup_{k=p}^n A_k$, alors il est dans A . Cela prouve $\bigcup_{k=p}^n A_k \subset A$.
- Réciproquement, si un tirage t est dans A , alors en appelant k le plus grand des numéros obtenus dans t , on a $t \in A_k$. Cela prouve $A \subset \bigcup_{k=p}^n A_k$.

D'autre part, on a $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$. En effet, si $t \in A_k \cap A_{k'}$, alors le plus grand numéro obtenu dans t est à la fois k et k' , ce qui contredit $k \neq k'$. Des deux points précédents on déduit :

$$\text{Card } A = \text{Card} \left(\bigcup_{k=p}^n A_k \right) = \sum_{k=p}^n \text{Card } A_k$$

D'où le résultat, d'après les questions précédentes.

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$$

4. Pour chacun des p tirages on a n possibilités, ce qui fait n^p possibilités au total.

Il y a n^p tirages possibles lorsque ceux-ci sont effectués avec remise.

5. Le nombre total de possibilités est ici un arrangement de p boules parmi n . En effet, il y a n choix pour la première boule, $n-1$ pour la seconde, $n-2$ pour la troisième, ... et $n-(p-1)$ pour la p -ème, ce qui laisse $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k) = \frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités au total.

Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ tirages donnant p boules distinctes, lorsque ceux-ci sont effectués avec remise.
On retrouve ainsi le nombre de tirages possibles dans le cas où ceux-ci sont effectués sans remise.

6. Il n'y a que deux possibilités :

- soit on a obtenu $p-1$ fois le numéro un et 1 fois le numéro trois, ce qui laisse p possibilités (il suffit de choisir le numéro du tirage qui donnera la boule numéro trois) ;
- soit on a obtenu $p-2$ fois le numéro un et 2 fois le numéro deux, ce qui laisse $\binom{p}{2}$ possibilités (il suffit de choisir les deux numéros de tirage qui donneront la boule numéro deux, et ces numéros sont choisis simultanément car ils ont le même rôle).

Ces deux cas étant disjoints, il suffit alors de sommer les deux nombres obtenus.

Il y a $\frac{p(p-1)}{2} + p = \frac{p(p+1)}{2}$ tirages où la somme des numéros obtenus fait $p+2$.

7. On commence par choisir les deux boules qui apparaîtront, il y a pour cela $\binom{n}{2}$ possibilités (on choisit ces boules simultanément car elles ont a priori le même rôle). Ensuite, pour chacune des p boules du tirage, il y a 2 choix, soit 2^p choix. Mais en raisonnant ainsi, on a compté les deux tirages qui ne comptaient que l'une des deux boules choisies : il faut donc retirer 2 à ce nombre.
En définitive, on obtient $\binom{n}{2}(2^p - 2) = n(n-1)(2^{p-1} - 1)$ possibilités.

Il y a $n(n-1)(2^{p-1} - 1)$ tirages où apparaissent exactement deux boules différentes.

8. On raisonne comme dans le cas précédent. Il y a déjà $\binom{n}{3}$ possibilités de choisir les trois boules qui apparaîtront, puis 3 choix pour chacune des p boules du tirage. Mais on doit alors retirer :
- les cas où n'apparaît qu'une seule boule, qui sont au nombre de 3 (un cas pour chacune des trois boules choisies) ;
 - les cas où n'apparaissent que deux boules exactement, et pour cela on choisit déjà ces deux boules parmi les trois, ce qui donne 3 possibilités, puis en raisonnant comme en 2.4 on voit qu'il y a $2^p - 2$ manières de positionner ces boules, soit $3(2^p - 2)$ possibilités au total.

En définitive, le nombre de possibilités est donc :

$$\binom{n}{3} (3^p - 3(2^p - 2) - 3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} (3^{p-1} - 2^p + 1)$$

Il y a $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} (3^{p-1} - 2^p + 1)$ tirages où apparaissent exactement trois boules différentes.

Exercice DS4.6.

1. On suppose que a n'est pas un nombre premier. Par définition, il existe $b, c \in \llbracket 2, a \rrbracket$ tel que $a = bc$. On a, d'après la formule de la somme géométrique :

$$(2^b - 1) (1 + 2^b + \dots + (2^b)^{c-1}) = (2^b - 1) \sum_{k=0}^{c-1} (2^b)^k = (2^b)^c - 1 = 2^{bc} - 1 = 2^a - 1.$$

Ainsi, $1 < 2^b - 1 < 2^a - 1$ et $2^b - 1$ divise $2^a - 1$ donc $2^a - 1$ n'est pas premier.

2. On a $2^8 - 1 = 255$ et $2^6 - 1 = 64$. On a, en faisant des divisions euclidiennes successives : $255 = 3 \times 63 + 3$, et 3 divise 63 donc le PGCD de $2^8 - 1$ et de $2^6 - 1$ est 3.
3. Compte tenu des notations, on a $a = bq + r$. De façon analogue à la question 1 :

$$M_a = 2^a - 1 = (2^b)^q \times 2^r - 1 = 2^r ((2^b)^q - 1) + 2^r - 1 = (2^b - 1) \times 2^r (1 + 2^b + \dots + (2^b)^{q-1}) + 2^r - 1$$

ce qui s'écrit $M_a = M_b \times Q + M_r$ où $Q = 2^r (1 + 2^b + \dots + (2^b)^{q-1})$. De plus, on a $0 \leq r < b$ donc $0 \leq M_r < M_b$. Finalement, M_r est le reste de la division euclidienne de M_a par M_b .

4. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+2} le reste de la division euclidienne de r_n par r_{n+1} : (r_n) est la suite des restes successifs dans l'algorithme d'Euclide. Par la question précédente, (M_{r_n}) est donc la suite des restes de la division euclidienne successifs de M_a par M_b . Si on note r_p le dernier reste non nul, il s'agit du PGCD de a et b donc M_{r_p} est le dernier reste non nul pour la suite (M_{r_n}) donc M_{r_p} est le PGCD de M_a et M_b . En conclusion, le PGCD de M_a et M_b est M_u où u est le PGCD de a et b . Cela est cohérent avec la question 2 : le PGCD de $2^8 - 1$ et $2^6 - 1$ est $2^2 - 1 = 3$ car 2 est le PGCD de 8 et 6.