

DS4

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,3,5,6 des exercices 2,4.

Exercice DS4.1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
3. On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}$ boules numérotées de 1 à n . On tire 5 boules simultanément dans cette urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien y a-t-il de tirages ne comprenant pas la boule 1 possibles ?

Exercice DS4.2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la parité de f .
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall x > 0, x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x > 0$. En déduire le tableau de variations de f .
4. 4.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ d'inconnue x admet une unique solution strictement positive.

On note x_n la valeur de cette solution et on étudie désormais la convergence de la suite $(x_n)_n$.

- 4.2. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante. En déduire qu'elle admet une limite réelle l .
- 4.3. Donner la valeur de $f(l)$. En déduire que $l = 0$.

Exercice DS4.3.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S_m) \begin{cases} (1-m)x + 2y - z &= 0 \\ -2x - (3+m)y + 3z &= 0 \\ x + y - (2+m)z &= 0 \end{cases}$$

1. Écrire le système (S_m) sous forme matricielle $A_m X = B$ où $A_m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que la matrice A_m est inversible si et seulement si $-3m - m^2 \neq 0$ et $-1 - m \neq 0$. On indiquera les opérations élémentaires effectuées sur la matrice A_m .
3. Résoudre le système (S_m) lorsque $m \notin \{-3, -1, 0\}$.
4. Résoudre le système (S_m) lorsque $m \in \{-3, 0\}$. On précisera les inconnues principales et secondaires et on écrira précisément l'ensemble des solutions du système.
5. Résoudre le système (S_m) lorsque $m = -1$.
6. Déterminer l'expression de l'inverse de la matrice A_m lorsque $m \notin \{-3, -1, 0\}$.

Exercice DS4.4.

Dans tout l'exercice, on considère la fonction

$$f : \begin{cases} [0, 2] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{2-x} \end{cases}$$

et la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien défini et appartient à l'intervalle $[0, \sqrt{2}]$.
2. 2.1. Montrer que $u_1 \in]1, \sqrt{2}]$.
- 2.2. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < 1 < u_{2n+1}.$$
- 2.3. Est-il possible que $(u_n)_n$ soit monotone à partir d'un certain rang ?
3. On pose, pour tout entier n , $v_n = u_{2n}$.
 - 3.1. Donner le sens de variations de f . En déduire celui de $f \circ f$.
 - 3.2. On suppose que $v_0 \leq v_1$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$. En déduire que $(v_n)_n$ admet une limite réelle.
 - 3.3. Montrer que si $v_0 > v_1$, alors $(v_n)_n$ admet également une limite réelle.

On admet que la suite $(w_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{2n+1}$$

admet également une limite réelle (la démonstration étant strictement analogue à celle pour $(v_n)_n$). On note $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ et $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

4. Soit $\alpha > 0$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [\alpha, +\infty[^2$ tels que $x \leq y$,

$$0 \leq \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(y - x)$$

On pourra développer l'expression $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})$.

5. Déduire des questions 1, 2.2 et 4 que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq w_n - v_{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}(w_n - v_n).$$

6. Montrer que $\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} < 1$.
7. En déduire que $l = l'$.
8. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 1.

Exercice DS4.5.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue p tirages avec $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dans les questions 1,2,3, on considère que les tirages sont effectués simultanément.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Soit $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. Déterminer le nombre de tirages possibles où le plus grand numéro obtenu est k .
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$. On justifiera soigneusement sa réponse.

Dans les questions suivantes, on considère que les tirages sont effectués successivement et avec remise.

4. Déterminer le nombre de tirages possibles.
5. Déterminer le nombre de tirages possibles où apparaissent p boules différentes.
Que remarque-t-on ?
6. Déterminer le nombre de tirages possibles où la somme des numéros obtenus vaut $p + 2$.
7. Déterminer le nombre de tirages possibles où apparaissent exactement deux boules différentes.

8. Déterminer le nombre de tirages possibles où apparaissent exactement trois boules différentes.

Exercice DS4.6.

On pose, pour tout entier naturel $a \geq 2$, $M_a = 2^a - 1$.

1. On suppose que $a \in \mathbb{N}$ et $a \geq 2$ n'est pas un nombre premier. Justifier qu'il existe des entiers naturels $b, c \geq 2$ tels que :

$$(2^b - 1)(1 + 2^b + \dots + (2^b)^{c-1}) = 2^a - 1.$$

En déduire que dans ce cas M_a n'est pas premier.

2. En appliquant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de $2^6 - 1$ et $2^8 - 1$.
3. Soient a, b des entiers naturels vérifiant $a > b \geq 2$. On souhaite déterminer le PGCD de M_a et M_b . On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b . Montrer que le reste de la division euclidienne de M_a par M_b est M_r .
4. Conclure que le PGCD de M_a et M_b est M_u où u est le PGCD de a et b . Cela est-il cohérent avec la question 2 ?