

Corrigé du DS3

Exercice DS3.1.

1. On procède par récurrence. Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

qui donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right) = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 1}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

où on a factorisé le polynôme $X^2 + 7X + 1$ avec ses racines ce qui achève la récurrence.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est impair. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. On a : $n^2 = 2(p^2 + 2p) + 1$ donc, comme $p^2 + 2p \in \mathbb{N}$, n^2 est impair. Ainsi, par contraposition, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice DS3.2.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a-b)^2 \\ \Rightarrow 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \Rightarrow 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ \Rightarrow \boxed{ab &\leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'inégalité $u_i v_i \leq \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2)$. En sommant ces inégalités pour i entre 1 et n , on obtient

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(u_i^2 + v_i^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right).$$

Puisque les deux sommes dans le membre de droite ci-dessus valent 1, il vient $\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq 1$.

3. 3.1. Si $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, alors $\sum_{k=1}^n x_k y_k = 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$, dont l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient « $0 \leq 0$ », qui est bien sûr vraie. Il en est de même si $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$.

3.2. Si $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, alors les réels $x_1^2, \dots, x_n^2$ sont tous positifs ou nuls et au moins l'un d'entre eux n'est pas nul : la somme $\sum_{i=1}^n x_i^2$ est donc strictement positive. Sa racine carrée est donc

bien définie, et non nulle. De même, puisque $(y_1, \dots, y_n) \neq (0, \dots, 0)$, on a $\sum_{i=1}^n y_i^2 > 0$ donc $\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ est bien défini et strictement positif. En particulier, les quotients par ces deux nombres sont bien définis : ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, u_k et v_k sont bien définis.

3.3. On a

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la somme $\sum_{i=1}^n x_i^2$ ne dépend pas de k , et l'on peut donc la sortir de la somme par rapport à k : ainsi

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Les variables i et k étant muettes, les sommes $\sum_{k=1}^n x_k^2$ et $\sum_{i=1}^n x_i^2$ sont égales. En fin de compte,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1}. \text{ Par la même démonstration, } \boxed{\sum_{k=1}^n v_k^2 = 1}.$$

3.4. D'après la question 3.(c), on peut appliquer le résultat de la question 2 aux réels $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ puisque $\sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq 1.$$

Comme précédemment, il n'y a pas d'indice « k » dans les deux racines situées au dénominateur, qui sont donc constantes par rapport à k et que l'on peut donc sortir de la somme. On obtient alors

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \times \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq 1$$

En multipliant par les deux racines, qui sont strictement positives, et en changeant l'indice « i » en « k », on conclut :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}}.$$

4. 4.1. On a :

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i = \frac{1}{k} \left(a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right).$$

Or, par définition de b_{k-1} , $\sum_{i=1}^{k-1} a_i = (k-1)b_{k-1}$: ainsi

$$\boxed{b_k = \frac{a_k + (k-1)b_{k-1}}{k}}.$$

En multipliant par b_k cette égalité, il vient

$$\begin{aligned} b_k^2 &= \frac{a_k b_k + (k-1)b_{k-1}b_k}{k} \\ \text{donc} \quad k b_k^2 &= a_k b_k + (k-1)b_{k-1}b_k \\ \text{soit} \quad &\boxed{a_k b_k = k b_k^2 - (k-1)b_{k-1}b_k.} \end{aligned}$$

4.2. L'inégalité de la question 1 donne $b_{k-1}b_k \leq \frac{1}{2}(b_k^2 + b_{k-1}^2)$ ce qui entraîne puisque $-(k-1) \neq 0$:

$$-(k-1)b_{k-1}b_k \geq -\frac{k-1}{2}(b_k^2 + b_{k-1}^2).$$

On ajoute alors $k b_k^2$ aux deux membres de cette inégalité et on utilise le résultat de la question 4.(a), ce qui donne

$$\begin{aligned} a_k b_k &\geq k b_k^2 - \frac{k-1}{2}(b_{k-1}^2 + b_k^2) \\ \text{donc} \quad 2a_k b_k &\geq 2k b_k^2 - (k-1)b_{k-1}^2 - k b_k^2 + b_k^2 \\ \text{soit} \quad 2a_k b_k - k b_k^2 + (k-1)b_{k-1}^2 &\geq b_k^2. \end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient bien $\boxed{b_k^2 \leq 2a_k b_k - (k b_k^2 - (k-1)b_{k-1}^2)}.$

5. En sommant l'inégalité précédent pour k entre 1 et n , il vient

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n (k b_k^2 - (k-1)b_{k-1}^2).$$

La deuxième somme ci-dessus est une somme télescopique dont le terme à $k=1$ est nul et celui à $k=n$ est $n^2 b_n^2$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k - n b_n^2$$

Puisque $n b_n^2 \geq 0$, on obtient $\boxed{\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k}.$

6. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au membre de droite de l'inégalité de la question 5 donne

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

puis par passage au carré puisque les deux membres sont positifs ou nuls,

$$\left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Il reste pour conclure à diviser par $\sum_{k=1}^n b_k^2$, ce qui nous amène à traiter à part le cas où ce terme est nul : or, s'il l'est, l'inégalité à montrer est évidente car son membre de gauche est nul et son membre de droite est positif ou nul (c'est le produit de 4 par une somme de carrés). On suppose désormais que $\sum_{k=1}^n b_k^2 \neq 0$; alors, l'inégalité précédente divisée par ce terme - qui est positif ou nul - donne bien l'inégalité cherchée :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2.}$$

Exercice DS3.3.

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, est $z^2 - 1 = 0$ et a pour racines 1 et -1 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (F) s'écrit :

$$\left\{ z : t \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^t + C_2 e^{-t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. On détermine d'abord une solution particulière de l'équation $z'' - z = e^{2t}$ en cherchant celle-ci sous la forme $z_p : t \mapsto C e^{2t}$ car 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. En injectant dans l'équation, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$4C e^{2t} - C e^{2t} = e^{2t} \iff 3C = 1 \iff C = \frac{1}{3}$$

donc $z_p : t \mapsto \frac{e^{2t}}{3}$ est une solution particulière de l'équation : $z'' - z = e^{2t}$. De façon analogue, $z_p : t \mapsto \frac{e^{-2t}}{3}$ est une solution particulière de l'équation : $z'' - z = e^{-2t}$ donc, par théorème de superposition, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} \right) = \frac{\text{sh}(2t)}{6}$$

est une solution particulière de (F) . Finalement, l'ensemble des solutions de (F) s'écrit :

$$\left\{ z : t \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{\text{sh}(2t)}{6} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$ et $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$.
4. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par positivité de ch sur $\mathbb{R}$:

$$\text{ch}(\text{sh}^{-1}(x)) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{sh}^{-1}(x))} = \sqrt{1 + x^2}.$$

On obtient également

$$e^{\text{sh}^{-1}(x)} = \text{ch}(\text{sh}^{-1}(x)) + \text{sh}(\text{sh}^{-1}(x)) = \sqrt{1 + x^2} + x$$

et $e^{-\text{sh}^{-1}(x)} = \sqrt{1 + x^2} - x$.

5. Comme $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, sh^{-1} est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sh}^{-1}(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{sh}^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

6. Par composition, comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, z également et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = \text{sh}'(t)y'(\text{sh } t) = \text{ch}(t)y'(\text{sh } t)$$

puis, par produit,

$$z''(t) = \text{ch}'(t)y'(\text{sh } t) + \text{ch}(t)\text{sh}'(t)y''(\text{sh } t) = \text{sh}(t)y'(\text{sh } t) + \text{ch}^2(t)y''(\text{sh } t).$$

Par bijectivité de sh, on a donc les équivalences, pour $t \in \mathbb{R}$, en posant $x = \text{sh } t$,

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) &= x\sqrt{1 + x^2} \iff (1 + \text{sh}^2 t)y'' + \text{sh}(t)y'(\text{sh } t) - y(\text{sh } t) = \text{sh } t\sqrt{1 + \text{sh}^2 t} \\ &\iff \text{ch}^2(t)y'' + \text{sh}(t)y'(\text{sh } t) - y(\text{sh } t) = \text{sh}(t)\text{ch}(t) \\ &\iff z''(t) - z(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) \end{aligned}$$

En conclusion, y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (F) .

7. Avec les équivalences précédentes, l'ensemble des solutions de (E) sont les fonction de la forme

$$y : x \mapsto C_1 e^{\operatorname{sh}^{-1}(x)} + C_2 e^{-\operatorname{sh}^{-1}(x)} + \frac{\operatorname{sh}(2 \operatorname{sh}^{-1}(x))}{6}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

8. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh}(2 \operatorname{sh}^{-1}(x)) = 2 \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) \times \operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) = x \sqrt{x^2 + 1}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) sont les fonction de la forme :

$$y : x \mapsto A \sqrt{x^2 + 1} + Bx + \frac{1}{3} x \sqrt{x^2 + 1}.$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ (on a posé $A = C_1 + C_2$ et $B = C_1 - C_2$).

Exercice DS3.4.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Si $p + q$ est pair, alors $\frac{p+q}{2}$ est un entier ; sinon, $p + q + 1$ est pair, et c'est $\frac{p+q+1}{2}$ qui est entier. Dans les deux cas, $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ est un entier, donc $f(p, q)$ est un entier, qui est positif ou nul car p et q le sont. Ainsi : $\boxed{\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, f(p, q) \in \mathbb{N}}$.
2. 2.1. Puisque $p \geq 0$, il est clair que

$$f(p, q) = p + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} \geq \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}.$$

Pour montrer l'autre inégalité demandée, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2} - f(p, q) &= \frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2} - \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} - p \\ &= (p+q+1) \left(\frac{p+q+2}{2} - \frac{p+q}{2} \right) - p \\ &= (p+q+1) - p \\ &= q+1 \\ &\geq 1 \quad \text{car } q \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2} \leq f(p, q) < \frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}}$.

- 2.2. Si $p + q < p' + q'$ alors, puisque ces deux nombres sont entiers, $p + q + 1 \leq p' + q'$. Par croissance de la fonction $x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2} \leq \frac{(p'+q')(p'+q'+1)}{2}.$$

On déduit alors de la question précédente que

$$f(p, q) < \frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2} \leq \frac{(p'+q')(p'+q'+1)}{2} \leq f(p', q').$$

En particulier, $\boxed{f(p, q) < f(p', q')}$.

- 2.3. Soient (p, q) et $(p', q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(p, q) = f(p', q')$. Montrons que $(p, q) = (p', q')$.

— Montrons d'abord que $p + q = p' + q'$. D'après la question précédente, si $p + q < p' + q'$, alors $f(p, q) < f(p', q')$, ce qui est impossible puisque ces deux nombres sont supposés égaux. De même, si $p' + q' < p + q$, alors $f(p', q') < f(p, q)$, ce qui est également exclu. Ainsi, $p + q = p' + q'$.

— Notons m la valeur commune de $p + q$ et $p' + q'$. On a alors

$$f(p, q) = p + \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{et} \quad f(p', q') = p' + \frac{m(m+1)}{2}.$$

On déduit alors de l'égalité « $f(p, q) = f(p', q')$ » que $p = p'$; mais puisqu'on a de plus montré que $p + q = p' + q'$, si p et p' sont égaux, alors q et q' le sont aussi. Ainsi, $(p, q) = (p', q')$.

En conclusion, f est injective.

3. 3.1. L'ensemble A contient 0 et est donc non vide. De plus, puisque le réel $\frac{m(m+1)}{2}$ tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{m(m+1)}{2}$ soit strictement plus grand que n : cet entier N majore donc A . Ainsi, A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, donc A admet un plus grand élément.

3.2. On a

$$\begin{aligned} q &= M - p \\ &= M - \left(n - \frac{M(M+1)}{2} \right) \\ &= M + 1 + \frac{M(M+1)}{2} - n - 1 \\ &= \frac{2(M+1) + M(M+1)}{2} - n - 1 \end{aligned}$$

soit $q = \frac{(M+1)(M+2)}{2} - n - 1$.

- 3.3. On observe tout d'abord que l'un des deux réels positifs $\frac{M}{2}$ et $\frac{M+1}{2}$ est un entier naturel (le premier si M est pair, et le second sinon) : ceci entraîne que le réel positif $\frac{M(M+1)}{2}$ est également un entier naturel. De plus, M étant un élément de A , $\frac{M(M+1)}{2}$ est inférieur ou égal à n par définition de A . Ainsi, p est un entier naturel. Par conséquent, $q = M - p$ est un entier relatif. Montrons que q est positif ou nul. D'après la question précédente, $q = \frac{(M+1)(M+2)}{2} - 1$. Or, par définition de M , $M+1$ n'appartient pas à A , donc $\frac{(M+1)(M+2)}{2} - n > 0$: comme c'est là encore un entier naturel, on a $\frac{(M+1)(M+2)}{2} - n \geq 1$, et par conséquent

$$q = \frac{(M+1)(M+2)}{2} - n - 1 \geq 0.$$

Finalement, p et q sont deux entiers naturels.

Calculons $f(p, q)$. On remarque que $p + q = M$ par définition de q : ainsi

$$f(p, q) = p - \frac{M(M+1)}{2} - \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} = p - \frac{M(M+1)}{2} + \frac{M(M+1)}{2}$$

soit $f(p, q) = n$ comme demandé.

4. D'après la question 3.(c), f est injective ; par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers p et q construits aux questions 4.(a) et 4.(b) fournissent un antécédent (p, q) de n , de sorte que tout entier naturel admet un antécédent par f et que f est donc surjective. Ainsi, f est bijective.

Exercice DS3.5.

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{E})$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Deux cas particulier où $a = b = 0$.

1. On a $(-2i)^3 = 8i$ puis les équivalences, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = 8i \iff \left(\frac{z}{-2i}\right)^3 = 1 \iff \frac{z}{-2i} \in \mathbb{U}_3$$

donc, comme $\mathbb{U}_3 = \{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^3 = 8i$ sont $\boxed{-2i, \sqrt{3} + i \text{ et } -\sqrt{3} + i}$.

On souhaite désormais résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = 18 + 26i \quad (\text{E1})$$

2. On a $(3 + i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2i + 3 \times 3 \times i^2 + i^3 = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i$ donc le nombre complexe $3 + i$ est une solution de (E1).

3. Comme précédemment, les solutions de l'équation (E1) sont $\boxed{3 + i, -\frac{\sqrt{3}+3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}-1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{3}-3}{2} + i\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}}$.

4. La fonction $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$ c'est-à-dire que (E) a au moins une solution réelle.

5. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, comme α est une solution de l'équation (E) :

$$z^3 + az^2 + bz + c = z^3 + az^2 + bz + c - (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = z^3 - \alpha^3 + a(z^2 - \alpha^2) + b(z - \alpha)$$

puis, avec les factorisations :

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - \alpha) [z^2 + \alpha z + \alpha^2 + a(z + \alpha) + b] = (z - \alpha)(z^2 + (\alpha + a)z + \alpha^2 + \alpha(a - b))$$

donc, en posant, $a' = 1$, $b' = (\alpha + a)$ et $c' = \alpha^2 + \alpha(a - b)$, l'équation (E) se réécrit

$$(z - \alpha)(a'z^2 + b'z + c') = 0.$$

6. On a l'équivalence, pour $z \in \mathbb{C}$ avec la question précédente :

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \iff z = \alpha \text{ ou } a'z^2 + b'z + c' = 0$$

et comme l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : a'z^2 + b'z + c' = 0$ admet au plus 2 solutions, l'équation (E) admet au plus 3 solutions.

On souhaite ici résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 18z - 35 = 0. \quad (\text{E2})$$

7. On a $(-\sqrt{6})^3 + 18\sqrt{6} - 35 = 12\sqrt{6} - 35 < 0$ car $12^2 \times 6 = 864 < 1225 = 35^2$ donc $(-\sqrt{6})^3 + 18\sqrt{6} - 35 \neq 0$ c'est-à-dire que $\boxed{-\sqrt{6} \text{ n'est pas solution de (E2)}}$.

8. On pose $\varphi : x \mapsto x^3 - 18x - 35$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 18 = 3(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}).$$

Ainsi la fonction la fonction φ admet pour maximum $\varphi(-\sqrt{6}) < 0$ (question précédente) sur $] -\infty, \sqrt{6}]$ donc elle ne s'annule pas sur cet intervalle. De plus, φ est strictement croissance sur $[\sqrt{6}, +\infty[$ donc, par continuité, elle réalise une bijection de $[\sqrt{6}, +\infty[$ sur $[\varphi(\sqrt{6}), +\infty[$. Le réel x_0 de la question 4 est unique :

$\boxed{\text{(E2) a une unique solution réelle}}$.

On suppose que dans l'équation (E2), il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $z = u + v$ et $uv = 6$.

9. On a

$$\begin{aligned} 0 &= z^3 - 18z - 35 = (u+v)^3 - 18(u+v) - 35 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 18(u+v) - 35 \\ &= u^3 + v^3 + 18(u+v) - 18(u+v) - 35 \end{aligned}$$

donc $\boxed{u^3 + v^3 = 35}$.

10. On a $u^3v^3 = (uv)^2 = 6^3 = 216$ et en développant, on a, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$(z - u^3)(z - v^3) = z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 = z^2 - 35z + 216$$

donc $\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les solutions de l'équation d'inconnue } X \in \mathbb{C} : X^2 - 35X + 216 = 0}$.

11. Les solutions de l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{C} : X^2 - 35X + 216 = 0$ sont 8 et 27 donc les valeurs possibles pour u^3 et v^3 sont 8 et 27. Posons $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les valeurs possibles pour u et v sont 2, $2j$, $2\bar{j}$, 3, $3j$ et $3\bar{j}$ mais comme $uv = 6$, les seules possibilités pour la somme $u + v$ sont $2 + 3$, $2j + 3\bar{j}$ et $3j + 2\bar{j}$. Ainsi, avec les calculs précédents, les nombres complexes

$$5, \quad -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sont des solutions de (E2). Or cette équation admet au plus trois solutions.

En conclusion, les solutions de (E2) sont

$$\boxed{5, \quad -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$