

DS3

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie. Vous séparerez, dans vos copies, les exercices 1,3,5 des exercices 2,4.

Exercice DS3.1.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}?$$

3. En raisonnant par contraposition, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice DS3.2.

Première partie : inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Montrer que pour tout couple (a, b) de réels on a l'inégalité : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1.$$

Montrer que $\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq 1$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cette question est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

- 3.1. On suppose que $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ ou $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Dans les questions qui suivent, on suppose que $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ et $(y_1, \dots, y_n) \neq (0, \dots, 0)$.

- 3.2. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les réels

$$u_k = \frac{x_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad \text{et} \quad v_k = \frac{y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

sont bien définis.

- 3.3. Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k^2 = \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1$.

- 3.4. Conclure à l'aide de la question 2.

Deuxième partie : une inégalité de Hardy discrète

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note b_k la « moyenne » de $a_1, \dots, a_k$, i.e.

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i.$$

On pose également $b_0 = 0$. Le but des questions qui suivent est de montrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4.1. Exprimer b_k en fonction de b_{k-1} et de a_k . En déduire que :

$$a_k b_k = k b_k^2 - (k-1) b_{k-1} b_k.$$

4.2. En utilisant l'inégalité de la question 1 pour majorer le produit $b_{k-1} b_k$, montrer que

$$b_k^2 \leq 2a_k b_k - (k b_k^2 - (k-1) b_{k-1}^2).$$

5. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{k=1}^n b_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

6. Conclure à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice DS3.3.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante, de fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(E) : (1+x^2)y'' + xy' - y = x\sqrt{1+x^2}.$$

On considère également l'équation différentielle suivante, de fonction inconnue z de la variable réelle t :

$$(F) : z'' - z = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (F) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (F) .
3. Justifier que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note sh^{-1} sa bijection réciproque.
4. Montrer que pour tout réel x : $\text{ch}(\text{sh}^{-1}(x)) = \sqrt{1+x^2}$. Simplifier également, pour tout réel x : $\text{sh}(\text{sh}^{-1}(x))$, $e^{\text{sh}^{-1}(x)}$ et $e^{-\text{sh}^{-1}(x)}$.
5. Justifier que la dérivée de sh^{-1} est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (on précisera sur quel ensemble).

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $z : t \mapsto y(\text{sh}(t))$.

6. Exprimer, en justifiant, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et t . En déduire que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (F) .
7. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) en fonction de sh^{-1} .
8. Déterminer finalement l'ensemble des solutions de (E) (on simplifiera au maximum l'expression précédente).

Exercice DS3.4.

Dans tout l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, f(p, q) = p + \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f(p, q)$ est un entier naturel.

L'objectif des questions qui suivent est de montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

2. 2.1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$\frac{(p+q)(p+q+1)}{2} \leq f(p, q) < \frac{(p+q+1)(p+q+2)}{2}.$$

- 2.2. Soient (p, q) et (p', q') deux couples d'entiers naturels. Montrer que si $p+q < p'+q'$, alors $f(p, q) < f(p', q')$.

On pourra admettre et utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- 2.3. Montrer que f est injective.
3. Soit n un entier naturel.

3.1. Montrer que l'ensemble $A = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{m(m+1)}{2} \leq n \right\}$ admet un plus grand élément.

Soit $M = \max A$. On pose $p = n - \frac{M(M+1)}{2}$ et $q = M - p$.

3.2. Montrer que $q = \frac{(M+1)(M+2)}{2} - n - 1$.

3.3. Montrer que p et q sont deux entiers naturels et que $f(p, q) = n$.

4. Conclure.

Exercice DS3.5.

Ce problème est consacré à l'étude de deux équations polynomiales de degré 3 d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + a z^2 + b z + c = 0 \quad (\text{E})$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Deux cas particulier où $a = b = 0$.

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^3 = 8i$.

On souhaite désormais résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 = 18 + 26i \quad (\text{E1})$$

2. Montrer que $3 + i$ est une solution de (E1).

3. Déterminer finalement toutes les solutions de (E1).

Théorème de d'Alembert-Gauss pour le degré 3 dans le cas réel.

On démontre ici un analogue du théorème pour les trinômes du second degré mais pour le degré 3 sans donner la forme des solutions : la forme des solutions est l'objet de la partie suivante.

4. Montrer que l'équation (E) a au moins une solution réelle que l'on notera α .

5. En déduire que l'équation (E) se réécrit

$$(z - \alpha)(a' z^2 + b' z + c') = 0$$

où on donnera une expression de a', b', c' en fonction de a, b, c .

6. Combien l'équation (E) a-t-elle au plus de solutions distinctes ?

Un troisième cas particulier : $a = 0, b = -18, c = -35$.

On souhaite ici résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 18z - 35 = 0. \quad (\text{E2})$$

7. La nombre $-\sqrt{6}$ est-il une solution de (E2) ?

8. Montrer que (E2) a une unique solution réelle.

On suppose que dans l'équation (E2), il existe $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $z = u + v$ et $uv = 6$.

9. Montrer que $u^3 + v^3 = 35$.

10. Montrer que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation d'inconnue $X \in \mathbb{C} : X^2 - 35X + 216 = 0$.

11. En déduire les valeurs possibles pour u^3 et v^3 puis résoudre finalement (E2) (on pourra calculer 19^2).