

Corrigé du DS2

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie.

Exercice DS2.1.

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer le module et un argument, lorsque c'est possible de $1 - e^{2i\theta}$.
2. Déterminer une primitive, sur un intervalle qu'on déterminera, de

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

3. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$, calculer

$$\int_2^3 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Exercice DS2.2.

On définit pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction f_y par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = x^2 + 2(y^2 + 1)x + (y^4 + 6y^2 + 1).$$

1. Dans cet question, y est un réel fixé.
 - 1.1. Résoudre l'équation $f_y(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - 1.2. En déduire deux réels a_y et b_y , dépendant de y , tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = (x - a_y)(x - b_y).$$

2. Dans cette question, on fixe un nombre complexe z non nul.

$$2.1. \text{ Montrer l'identité : } \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \frac{|z|^4 + 2 \operatorname{Re}(z^2) + 1}{|z|^2}.$$

- 2.2. Soient $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. Montrer l'équivalence

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2 \iff f_y(x) = 0.$$

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on appelle « parabole renversée » tout ensemble ayant pour équation $x = y^2 + Ay + B$, où A et B sont deux constantes réelles.

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'affixe z vérifie $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2$ est l'union de deux paraboles renversées que l'on précisera.
4. Déterminer les points de $\mathcal{E}$ dont l'affixe est réelle, puis ceux dont l'affixe est imaginaire pure.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{E}$.

Exercice DS2.3.

Le but de l'exercice est de tracer le graphe de la fonction $\varphi : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe de φ .

1. La fonction f , en tant que fonction polynomiale, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 12x^2 - 3 = 12(x + 1/2)(x - 1/2)$$

ce qui donne le tableau sur $[-1, 1]$:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f	$-\infty$	-1	1	-1	1	$+\infty$

Comme $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$ et que, avec le tableau, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1, 1] \iff x \in [-1, 1]$, φ est définie sur $[-1, 1]$.

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(3x) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \sin x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos x - i \sin^3 x) = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x$$

puis, comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient,

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

3. On pose $\psi : x \mapsto \arccos x + \arccos(-x)$. Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\psi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + (-1) \frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0.$$

Ainsi, ψ est constante sur $] -1, 1[$ et comme $\psi(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi = \psi(-1) = \psi(1)$, on a donc, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\psi(x) = \pi$ c'est-à-dire,

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

La fonction φ est définie sur $[-1, 1]$ qui est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(0+x) + \varphi(0-x)}{2} &= \frac{\arccos(4x^3 - 3x) + \arccos(4(-x)^3 - 3(-x))}{2} \\ &= \frac{\arccos(4x^3 - 3x) + \arccos(-(4x^3 - 3x))}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point A de coordonnées $(0, \frac{\pi}{2})$.

4. Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. La fonction $\cos$, en tant que fonction continue et strictement décroissante, réalise une bijection de $[0, \pi/3]$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ donc il existe un unique $t \in [0, \pi/3]$ tel que $x = \cos(t)$ ce qu'on peut écrire $t = \arccos x$. On obtient

$$\varphi(x) = \varphi(\cos t) = \arccos(4 \cos^3 t - 3 \cos t) = \arccos(\cos 3t) = 3t$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait $3t \in [0, \pi]$. On a donc obtenu :

$$\forall x \in [0, \pi/3], \quad \varphi(x) = 3 \arccos x.$$

5. Montrer également qu'il existe des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi(x) = a + b \arccos(x)$ où on donnera les valeurs de a et b .
6. Tracer finalement $\mathcal{C}$. On commencera par tracer la courbe de la fonction $\arccos$ et on expliquera ensuite ses déductions.

Problème DS2.4.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite d'intégrale, qu'on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t^2} dt.$$

On note, dans ce problème, $0! = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Question préliminaire

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2^{n-1}$. En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de u_n .

Signe et monotonie de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_n et justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de I_n .
2. Calculer I_0 puis I_1 (on pourra faire une intégration par parties).
3. Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (on donnera son tableau de variations comportant les limites aux bornes de son ensemble de définition). En déduire le signe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de I_n .
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [1, e]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5. Déterminer une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$ entre I_{n+1} et I_n .
6. Calculer I_2 .
7. En faisant le changement de variable $y = \ln t$, déterminer $a, b \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une fonction g tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_a^b y^n g(y) dy.$$

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente (si oui, on précisera sa limite) ?

Une expression de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. Montrer qu'il existe une suite **d'entiers naturels** $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n! - \frac{b_n}{e}.$$

On déterminera b_0, b_1, b_2 ainsi qu'une relation entre b_n et b_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Déterminer la limite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la limite de $(b_n/n!)_{n \in \mathbb{N}}$.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

12. Déterminer la limite de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Exercice DS2.5.

1. Soit x un réel non congru à 0 modulo π . On définit la suite $(P_n(x))_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

où, dans chaque cosinus, le dénominateur est une puissance de 2 ; on note aussi $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

- 1.1. À l'aide de la formule « $\sin(2x) = \dots$ », donner une expression simplifiée de $P_2(x)$ puis de $P_4(x)$.
- 1.2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. Exprimer $Q_{n+1}(x)$ en fonction de $Q_n(x)$.
- 1.3. En déduire une expression simplifiée de $Q_n(x)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 1.4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^{n+1}}}.$$

- 1.5. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- 1.6. En déduire la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$, en fonction de x .

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

où le symbole « $\sqrt{}$ » apparaît n fois : ainsi, $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, etc.

- 2.1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

3. Déduire des deux premières questions la formule de Viète (1593) :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}.$$