

DS2

Durée : 4h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie.

Exercice DS2.1.

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer le module et un argument, lorsque c'est possible de $1 - e^{2i\theta}$.
2. Déterminer une primitive, sur un intervalle qu'on déterminera, de

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

3. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$, calculer

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Exercice DS2.2.

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_y(t) = t^2 + 2(y^2 - 1)t + (y^4 - 6y^2 + 1).$$

Dans les questions qui suivent, y est un réel fixé.

- 1.1. Résoudre l'équation « $f_y(t) = 0$ » d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

On note $t_1(y)$ et $t_2(y)$ ses deux solutions, éventuellement égales, et qui dépendent du réel y .

- 1.2. Mettre $t_1(y)$ et $t_2(y)$ sous forme canonique (i.e. sous la forme $A(y - a)^2 + B$, où a , A et B sont des constantes).

Dans la suite de l'exercice, on cherche à résoudre l'équation $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$, notée (E), d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'identité : $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \frac{|z|^4 + 2\operatorname{Re}(z^2) + 1}{|z|^2}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'équivalence

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \iff f_y(x^2) = 0.$$

4. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est l'union de deux ensembles que l'on caractérisera géométriquement.

Exercice DS2.3.

Le but de l'exercice est de tracer le graphe de la fonction $\varphi : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe de φ .

1. En étudiant la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 3x$, montrer que φ est définie sur $[-1, 1]$.
2. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$. En déduire, en justifiant sa réponse, que la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point A de coordonnées $(0, \frac{\pi}{2})$.
4. Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, il existe un unique $t \in [0, \pi/3]$ tel que $x = \cos(t)$. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\varphi(x) = 3\arccos(x)$.
5. Montrer également qu'il existe des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi(x) = a + b\arccos(x)$ où on donnera les valeurs de a et b .
6. Tracer finalement $\mathcal{C}$. On commencera par tracer la courbe de la fonction $\arccos$ et on expliquera ensuite ses déductions.

Problème DS2.4.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite d'intégrale, qu'on notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln t)^n}{t^2} dt.$$

On note, dans ce problème, $0! = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Question préliminaire

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2^{n-1}$. En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de u_n .

Signe et monotonie de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \mapsto \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

2. Déterminer le domaine de définition de f_n et justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_0 puis I_1 (on pourra faire une intégration par parties).
4. Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (on donnera son tableau de variations comportant les limites aux bornes de son ensemble de définition) pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le signe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de I_n .
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [1, e]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

6. Déterminer une relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, entre I_{n+1} et I_n .
7. Calculer I_2 .
8. En faisant le changement de variable $y = \ln t$, déterminer $a, b \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une fonction g tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_a^b y^n g(y) dy.$$

9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente (si oui, on précisera sa limite) ?

Une expression de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Montrer qu'il existe une suite d'entiers naturels $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n! - \frac{b_n}{e}.$$

On déterminera b_0, b_1, b_2 ainsi qu'une relation entre b_n et b_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Déterminer la limite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la limite de $(b_n/n!)_{n \in \mathbb{N}}$.
12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

13. Déterminer la limite de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Exercice DS2.5.

1. Soit x un réel non congru à 0 modulo π . On définit la suite $(P_n(x))_n$ par $P_0(x) = 1$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

où, dans chaque cosinus, le dénominateur est une puissance de 2 : on note aussi dans ce cas

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

- 1.1. À l'aide de la formule « $\sin(2\theta) = \dots$ », donner une expression simplifiée de $P_2(x)$ puis de $P_3(x)$.
- 1.2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. Exprimer $Q_{n+1}(x)$ en fonction de $Q_n(x)$.
- 1.3. En déduire une expression simplifiée de $Q_n(x)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 1.4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}.$$

- 1.5. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 1.6. En déduire la limite de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$, en fonction de x .
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

où le symbole « $\sqrt{}$ » apparaît n fois : ainsi, $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, etc.

- 2.1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

3. Déduire des deux premières questions la formule de Viète (1593) :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}.$$