

Bilan et corrigé du DS1

Exercice DS1.1.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2 + mx - 2} = 2x + 1 \quad (E_m)$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto 2 + mx - 2 = mx$. Par produit, on a deux cas possibles :
 - lorsque $m \geq 0$, f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$;
 - lorsque $m \leq 0$, f est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.
- De façon analogue au cas précédent, l'équation (E_m) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ lorsque $m \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ lorsque $m \leq 0$.
- On a les équivalences, pour $m \in \mathbb{R}$,

$$m - 1 \geq (m + 2)(m - 10) \iff m - 1 \geq m^2 - 8m - 20 \iff m^2 - 9m - 19.$$

Or les racines du polynôme $X^2 - 9X - 19$ sont

$$\frac{9 + \sqrt{157}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{9 - \sqrt{157}}{2}$$

donc, on obtient le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 9x - 19$ puis la résolution de l'inéquation :

$$\text{lorsque } m \in \mathbb{R}, m - 1 \geq (m + 2)(m - 10) \text{ si et seulement si } m \in \left[\frac{9 - \sqrt{157}}{2}, \frac{9 + \sqrt{157}}{2} \right].$$

Avec des calculs tout à fait analogues

$$\text{lorsque } m \in \mathbb{R}, 1 - m \leq (m + 2)(m - 10) \text{ si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \left] \frac{7 - \sqrt{133}}{2}, \frac{7 + \sqrt{133}}{2} \right[.$$

- On traite plusieurs cas.

- Lorsque $m = 0$, (E_m) a une unique solution $-\frac{1}{2}$.
- On traite le cas où $m > 0$. On considère donc $x \in \mathbb{R}_+$. L'équation (E_m) est équivalente (en mettant les deux termes de l'équation au carré) à

$$4x^2 + (4 - m)x + 1 = 0.$$

Les discriminant de $4X^2 + (4 - m)X + 1$ vaut $(4 - m)^2 - 16 = m(m - 8)$. Ainsi, lorsque $m \in]0, 8[$, (E_m) n'a pas de solution alors que lorsque $m > 8$, le polynôme possède deux racines :

$$\frac{m - 4 + \sqrt{m(m - 8)}}{16} \quad \text{et} \quad \frac{m - 4 - \sqrt{m(m - 8)}}{16}$$

qui sont toutes deux positives (la première clairement et la seconde car $(m - 4)^2 = m^2 - 4m + 16 > m^2 - 8m$). Ainsi, lorsque $m \in]0, 8[$, (E_m) n'a pas de solution et lorsque $m > 8$, (E_m) possède pour solutions les deux racines du polynôme précédent.

- Lorsque $m < 0$, on procède comme dans le cas précédent en éliminant la racine positive et dans ce cas, la seule solution de l'équation est

$$\frac{m - 4 - \sqrt{m(m - 8)}}{16}.$$

Exercice DS1.2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, f est définie en x si, et seulement si, $\ln$ est défini en x et est non nul. Or le logarithme népérien est défini sur $]0, +\infty[$ et s'annule uniquement en 1. Ainsi :

$$\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2. — Le logarithme tend vers $-\infty$ en 0, donc par passage à l'inverse,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

En composant par l'exponentielle, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

- Quand $x \rightarrow 1$ par valeurs inférieures, $\ln x \rightarrow 0$ par valeurs inférieures ; par passage à l'inverse, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{-\infty} \exp$ soit

$$\lim_{1^-} f = 0.$$

- De même,

$$\frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty \quad \text{donc} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty.$$

- Enfin, en $+\infty$, le logarithme népérien tend vers $+\infty$ donc son inverse vers 0, ce qui donne

$$\lim_{+\infty} f = \exp(0) = 1.$$

3. Le logarithme étant dérivable et non nul sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, son inverse est dérivable sur cet ensemble ; l'exponentielle étant de plus dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, d'après le théorème de composition de fonctions dérivables.

En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on obtient, pour tout réel $x > 0$ différent de 1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\ln x} \right] \times \exp \left(\frac{1}{\ln x} \right) \\ &= -\frac{\ln'(x)}{(\ln x)^2} \times \exp \left(\frac{1}{\ln x} \right) \\ &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} f(x). \end{aligned}$$

Or, l'exponentielle étant toujours strictement positive, tout comme le carré du logarithme, $f'(x)$ a le même signe que x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{-1\}$, donc f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur chacun des intervalles inclus dans $\mathcal{D}$, i.e. sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ ayant été calculées à la question 2, on en déduit le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
f	1	$+\infty$ 0	1

4. 4.1. Soit $x \in \mathcal{D}$; on veut montrer que $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}$, i.e. que c'est un réel strictement positif et différent de 1. Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{\ln x} \right) > 0.$$

Il reste à montrer que $f(x)$ différent de 1. Or, le seul point en lequel la fonction exponentielle atteint la valeur 1 est 0 ; on en déduit que, pour que $f(x)$ soit nul, il faudrait que $1/\ln x$ soit nul, ce qui est impossible car l'inverse d'un réel n'est jamais nul. Ainsi, $f(x) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ pour tout $x \in \mathcal{D}$: on a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{D}}$.

- 4.2. Soit $x \in \mathcal{D}$. Alors d'après la question précédente, $f(x)$ appartient à $\mathcal{D}$, qui est l'ensemble de définition de f . Ainsi f est définie en $f(x)$: autrement dit, $f(f(x))$ est bien défini, et ce pour tout $x \in \mathcal{D}$, ce qui prouve que $f \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a alors

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= \exp\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln(\exp(\ln(\frac{1}{\ln x})))}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{1/\ln x}\right) \\ &= \exp(\ln x) \end{aligned}$$

soit : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, f \circ f(x) = x}$.

- 4.3. Si l'on pose $g = f$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, g(f(x)) = x \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(g(x)) = x \end{cases}$$

Ceci montre que f est bijective et que $f^{-1} = g$, mais on a posé $g = f$: autrement dit, f est bijective et est égale à sa propre bijection réciproque.

La courbe représentative de f^{-1} étant la symétrique par rapport à la première bissectrice de celle de f , on en déduit que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice DS1.3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors la fonction f est définie en x si et seulement si, d'une part, $x \neq 0$ pour que le quotient ait un sens et, d'autre part, $\ln$ est défini en x ce qui nécessite $x > 0$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*}$.

Calculons d'abord la limite de f en 0 : on a

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Par produit, $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et en composant par l'exponentielle : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$.

Concernant la limite en $+\infty$, on a par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

d'où en composant par l'exponentielle : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$.

2. Le logarithme et la fonction inverse étant dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln x/x$ l'est aussi ; comme l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$. Pour tout $x > 0$, on a alors d'après la formule donnant la dérivée d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\ln x}{x} \right] \times \exp' \left(\frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \left(\frac{\ln'(x)}{x} + \ln x \times \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \right] \right) \times \exp \left(\frac{\ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \times \exp \left(\frac{\ln x}{x} \right)}.$$

3. Puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vaut 1 en e , on a, pour tout $x > 0$, les équivalences :

$$\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e \quad \text{et} \quad \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$1/e$	$+\infty$
f	0	$e^{(1/e)}$	1

4. On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n^{1/n} = \exp\left(n \times \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = f(n).$$

Or, d'après la question précédente, la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, donc en particulier sur $[3, +\infty[$ puisque $e > 3$. Ceci entraîne que

$$\forall n > 3, u_n = f(n) < f(3) = u_3.$$

Ainsi, aucune des valeurs de u_n avec $n > 3$ ne peut être maximale : on conclut que

$$\boxed{\text{la plus grande valeur de } (u_n)_n \text{ est } u_1, u_2 \text{ ou } u_3.}$$

5. On constate que

$$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8 \quad \text{et} \quad (\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9.$$

Ainsi, $\sqrt{2}^6 < \sqrt[3]{3}^6$ et en composant par la racine sixième qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\boxed{\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}.}$$

6. La question précédente montre que $u_2 < u_3$, et on sait de plus que $u_n < u_3$ pour tout $n > 3$ d'après la question 4 ; enfin, $u_1 = 1$ et $u_3 > 1$ puisque $(u_3)^3 = 3 > 1$. En fin de compte :

$$\boxed{\text{La plus grande valeur de la suite } (u_n)_n \text{ est } u_3 = \sqrt[3]{3}.}$$

Exercice DS1.4.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, les équivalences :

$$\begin{aligned} \sin(4x) = \sin x &\Leftrightarrow 4x \equiv x[2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x \equiv \pi - x[\pi] \\ &\Leftrightarrow 3x \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x \equiv \pi[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi/3] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi/5[2\pi/5] \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : \sin 4x = \sin x$ est

$$\left\{ \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et lorsque $x \in]-\pi, \pi]$, pour la même équation :

$$\left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \pi \right\}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2 \cos(2x) \sin(2x) = 2(2 \cos^2 x - 1) 2 \sin x \cos x$$

donc $\boxed{\sin(4x) = 4(2 \cos^2 x - 1) \sin x \cos x}$ et comme

$$\begin{aligned} \sin x (2 \cos x + 1) (4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1) &= \sin x (2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1) \\ &= 4(2 \cos^2 x - 1) \sin x \cos x - \sin x, \end{aligned}$$

on a bien $\boxed{\sin(4x) - \sin x = \sin x (2 \cos x + 1) (4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1)}$.

3. Avec l'égalité précédente et la question 1, on a :

$$0 = \sin(4\pi/5) - \sin(\pi/5) = \sin(\pi/5) (2 \cos(\pi/5) + 1) (4 \cos^2(\pi/5) - 2 \cos(\pi/5) - 1)$$

et comme $\cos(\pi/5), \sin(\pi/5) > 0$, on obtient

$$4 \cos^2(\pi/5) - 2 \cos(\pi/5) - 1 = 0.$$

Or les racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$ sont

$$\frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Or $\cos(\pi/5) > 0$ donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}.$$

On a également

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$$

ce qui donne

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

Exercice DS1.5.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, les équivalences :

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0 \iff 1 - \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\iff \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 1/2 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : 1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0$ est

$$\boxed{\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

et lorsque $x \in]-\pi, \pi]$, pour la même équation :

$$\boxed{\left\{ -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \right\}}.$$

2. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a les égalités

$$\begin{aligned} & \cos(nx) \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \cos((2n+1)x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos((2n+2)x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos(nx) \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{4n+3}{2}x\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos(nx) \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{4n+3}{2}x\right) \sin(x) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{4n+1}{2}x\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{4n+5}{2}x\right) - \cos\left(\frac{4n+1}{2}x\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \cos\left(\frac{2n+3}{2}x\right) \cos((n+1)x) \right] \end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\boxed{\cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos((2n+1)x) + \cos((2n+2)x) = \cos((n+1)x) \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

3. On a

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(k\pi) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{2n} 1 = 2n+1 \neq 0$$

donc π n'est pas solution de (E') .

4. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) = \cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^k \cos(kx) = 1 = \cos(0x) \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) = \cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) - \cos((2n+1)x) + \cos((2n+2)x) \\ &= \cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos((2n+1)x) + \cos((2n+2)x) \end{aligned}$$

donc avec une question précédente,

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k \cos(kx) = \cos((n+1)x) \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ce qui achève la récurrence

5. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On a l'équivalence

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = 0 \iff nx \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{2n+1}{2}x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Finalement, les solutions de l'équation (E') sont de la forme

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{k'\pi}{2n+1}$$

où $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq 2k+1 < n$ et $0 \leq k' < 2n+1$. Pour résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$, ce sont les mêmes solutions à 2π près.

Exercice DS1.6.

Dans la première ligne, il fallait lire (et la plupart l'ont vu) « la fonction ϕ » (et non « f ») « définie sur $\mathbb{R}$ par... ».

1. L'intervalle $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -\phi(x).$$

On en déduit que ϕ est impaire.

2. La fonction ϕ étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

On en déduit que ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle est par ailleurs continue sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans son intervalle d'arrivée J . Cet intervalle se déduit du calcul des limites de ϕ en $\pm\infty$: or

$$\lim_{+\infty} \phi = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} \phi = -\infty.$$

Ainsi $J = \mathbb{R}$, ce qui achève de prouver que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. La fonction ϕ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc sa bijection réciproque ψ est définie sur $\mathbb{R}$; de plus, puisque ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas, le théorème de dérivation d'une bijection réciproque assure que ψ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{\phi'(\psi(x))}.$$

Puisque $\phi'(x) = 3x^2 + 1$ pour tout réel x , on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \frac{1}{3\phi(x)^2 + 1}.$$

Erreur dans l'énoncé à la question suivante : il fallait lire « ψ » à la place de « f ».

4. D'après la formule obtenue à la question 4, la fonction ψ' est l'inverse de la fonction $x \mapsto 3\phi(x)^2 + 1$ qui est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: ceci justifie que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a

$$\psi'(x) = -\frac{\frac{d}{dx}(3\phi(x)^2 + 1)}{(\phi(x) + 1)^2}$$

$$\text{soit} \quad \psi'(x) = -\frac{6\phi'(x)\phi(x)}{(\phi(x) + 1)^2}.$$

Puisque $\phi(0) = 0$ il vient immédiatement $\psi''(0) = 0$.

Nouvelle erreur dans l'énoncé : dans la ligne qui suit la question 4, « h » doit être remplacé par « f ». Ainsi, dans toutes les questions restantes, f est une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (qui n'a rien à voir avec la fonction ϕ étudiée jusqu'ici).

- 1.1. Ici, on suppose que f est paire et dérivable : en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x).$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, et puisque $\frac{d}{dx}[f(-x)] = -f'(-x)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f'(-x).$$

Ceci prouve que si f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f' est impaire.

- 1.2. La démonstration est la même qu'à la question précédente.
- 1.3. Prenons pour f la fonction constante de valeur 1 : alors f n'est pas impaire car $f(1) \neq f(-1)$, mais sa dérivée, qui est la fonction constante de valeur 0, est paire.
2. 2.1. Si f est paire, posons $y = f(1)$: alors $y = f(1) = f(-1)$. Ainsi y admet deux antécédents par f , qui n'est donc pas bijective. Une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ n'est donc jamais bijective.
- 2.2. Notons g la bijection réciproque de f . Soit $y \in J$, et x l'unique antécédent de y par f ; en particulier

$$-y = -f(x) = f(-x)$$

donc $-y$ appartient à J , et ceci étant vrai pour tout $y \in J$, l'intervalle J est symétrique par rapport à 0.

De plus, des égalités « $y = f(x)$ » et « $-y = -f(x) = f(-x)$ », il vient

$$g(y) = g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad g(-y) = g(f(-x)) = -x.$$

En particulier, $g(y) = -g(-y)$, et ceci est valable pour tout $y \in J$: g est impaire.