

DS1

Durée : 2h. La calculatrice et tout autre document que des copies vierges est interdit. Vous inscrirez lisiblement vos noms et prénoms et laisserez une marge à gauche de votre copie pour les annotations (les marges déjà faites sur certaines copies suffisent). Si vous repérez une éventuelle erreur d'énoncé, faites le figurer sur votre copie.

Exercice DS1.1.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2 + mx - 2} = 2x + 1 \quad (E_m)$$

1. Quel est le signe, sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2 + mx - 2$ (on pourra traiter plusieurs cas).
2. Pour quelles valeurs de x l'équation (E_m) est-elle définie ?
3. Résoudre les inéquations, d'inconnue $m \in \mathbb{R}$, $m - 1 \geq (m + 2)(m - 10)$ puis $(m + 2)(m - 10) \geq 1 - m$.
4. Dédurre finalement l'expression et le nombre des solutions de (E_m) .

Exercice DS1.2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche de f en 1.
3. Dresser le tableau des variations de f .
4. 4.1. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}$.
4.2. En déduire que la fonction $f \circ f$ est définie sur $\mathcal{D}$ et la calculer.
4.3. Montrer que f est bijective de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ et donner f^{-1} . Qu'en déduire sur la courbe représentative de f ?

Exercice DS1.3.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

L'objectif des questions qui suivent est de déterminer la plus grande valeur possible de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On pose donc $u_n = \sqrt[n]{n}$ pour tout entier $n \geq 1$

4. Justifier que la plus grande valeur de u_n est u_1 , u_2 ou u_3 .
5. Montrer que $\sqrt{2} \leq \sqrt[3]{3}$.
6. Conclure.

Exercice DS1.4.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sin(4x) = \sin x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, puis vérifier que

$$\sin(4x) - \sin x = \sin x(2 \cos x + 1)(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1).$$

3. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$, puis de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercice DS1.5.

On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0. \quad (\text{E})$$

1. Déterminer les solutions de (E) pour $x \in]-\pi, \pi]$ et pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) - \dots + \cos(2nx) = 0. \quad (\text{E}')$$

qui peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) = 0. \quad (\text{E}')$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos((2n+1)x) + \cos((2n+2)x) = \cos((n+1)x) \frac{\cos\left(\frac{2n+3}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Montrer que $x = \pi$ n'est pas solution de (E').

4. En déduire que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx) = \cos(nx) \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

5. Résoudre finalement (E') pour $x \in]-\pi, \pi[$ puis pour $x \in \mathbb{R}$.

6. Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sin(kx) = 0. \quad (\text{E}'')$$

Exercice DS1.6.

Dans toutes les questions qui suivent, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^3 + x$.

1. Étudier la parité de φ .
2. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne maintenant par ψ la bijection réciproque de φ .

3. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout réel x , $\psi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
4. En déduire que g' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $(g')'(0)$?

Dans les questions 3 et 4, on se donne une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - 1.1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
 - 1.2. Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
 - 1.3. Donner un exemple de fonction f , non impaire, et telle que f' soit paire. Justifier votre réponse.
2. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
 - 2.1. On suppose que f est paire. Est-il possible que f soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans J ?
 - 2.2. On suppose que f est impaire et bijective de $\mathbb{R}$ dans J . Montrer que la bijection réciproque de f est impaire.