Polynômes orthogonaux.

On considère un intervalle $[a, b]$, $a < b$.

Définition: On appelle poids sur $[a, b]$ une fonction w presque partout strictement positive et intégrable sur $[a, b]$.

On notera $(f|g)_w = \int_a^b w(t) f(t) g(t) \, dt$ le produit scalaire sur $L^2([a, b], w(t)\, dt)$.

I) Construction des polynômes.

Définition: Il existe une famille $P_0, \dots, P_n, \dots$ de polynômes vérifiant :

(i) $\deg(P_n) = n$,

(ii) Si $\deg(Q) < n$, $(P_n | Q)_w = 0$.

On appelle une telle suite polynômes orthogonaux.

Démonstration: On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $(1, X, \dots, X^n, \dots)$ pour $(\cdot|\cdot)_w$.

On a : $P_0 = 1$ et $P_n = X^n + Q$ où $\deg(Q) < n$ ($Q \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^{n-1})$) donc $\deg(P_n) = n$. L'orthogonalité (ii) est vraie par définition du procédé.

Proposition: Si $P_0, \dots, P_n, \dots$ et $Q_0, \dots, Q_n, \dots$ sont deux suites de polynômes orthogonaux,

$$\forall n, \quad P_n = \alpha_n Q_n \text{ où } \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

<u>Démonstration:</u> Comme $\deg(P_n) = \deg(Q_n) = n$,

$P_n = \underbrace{p_n}_{\neq 0} X^n + \tilde{P}$ et $Q_n = \underbrace{q_n}_{\neq 0} X^n + \tilde{Q}$. On pose $\alpha_n = \dfrac{p_n}{q_n}$

On a : $\big((P_n - \alpha_n Q_n) \mid (P_n - \alpha_n Q_n)\big)_w$

$$= \big(P_n \mid P_n - \alpha_n Q_n\big)_w - \alpha_n \big(Q_n \mid P_n - \alpha_n Q_n\big)_w$$

Or $\deg(P_n - \alpha_n Q_n) = \deg(\tilde{P} - \alpha_n \tilde{Q}) < n$ donc

$(P_n \mid P_n - \alpha_n Q_n) = (Q_n \mid P_n - \alpha_n Q_n) = 0$.

Finalement, comme w est un produit scalaire et que $\|P_n - \alpha_n Q_n\|_w = 0$, $P_n = \alpha_n Q_n$.

<u>Remarque</u> $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par le th. des degrés étagés.
Enfin, il est possible de fixer l'unicité de tels polynômes par divers moyens:

(i) P_n est unitaire,

(ii) $\|P_n\|_w = 1$,

(iii) $P_n(a)$ ou $P_n(b) = \text{cte}$.

par exemple. ~~[illegible] dans la suite l'unique [illegible]~~

II) <u>Relation de récurrence:</u>

<u>Théorème:</u> Pour tout $n \geq 1$:

$$P_{n+1} = (a_n x + b_n) P_n - c_n P_{n-1}$$

avec, en notant $P_j = k_j X^j + k_j' X^{j-1} + \dots$,

$$a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad b_n = a_n \left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right), \quad c_n = a_n \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})}$$

<u>Démonstration</u> : Si la relation de récurrence est vérifiée :

$P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n$ est de degré $n-1$.

Écrivons les égalités pour les monômes de degré $n+1$ et n

$$k_{n+1} X^{n+1} + k'_{n+1} X^{n} + \dots - (a_n x + b_n)\left[k_n X^n + k'_n X^{n-1} + \dots\right]$$

est de degré $\leqslant n-1$ donc :

$$\begin{cases} k_{n+1} - a_n k_n = 0 \\ k'_{n+1} - b_n k_n - a_n k'_n = 0 \end{cases} \quad \text{donne } (*) \begin{cases} a_n = \dfrac{k_{n+1}}{k_n} \\ b_n = a_n\left[\dfrac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \dfrac{k'_n}{k_n}\right] \end{cases}$$

Posons a_n et b_n comme dans $(*)$.

Dans ce cas, $P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n$ est de degré $\leqslant n-1$.

On décompose ce polynôme sur la base $(P_0, \dots, P_{n-1})$:

$$(P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{n,j} P_j$$

Faisons le produit scalaire de cette relation avec P_i où $i < n-1$. On a, puisque $P_{n+1} \perp \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puisque $\deg(P_i) < n-1$,

$$\big((P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n) \,\big|\, P_i\big) = -(a_n x P_n \,|\, P_i)$$

Or, par la formule du produit scalaire,

$(x P_n | P_i) = (P_n | x P_i)$ et $\deg(x P_i) \leqslant n-1$

donc, $i < n-1 \Rightarrow$

$$(P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n \,|\, P_i) = 0 = \underbrace{\mu_{n,i}}_{=0 \text{ car}} \underbrace{(P_i | P_i)}_{\neq 0}$$

On a donc :

$$P_{n+1} - (a_n x + b_n) P_n = - c_n P_{n-1} \quad \text{où } c_n = -\mu_{n,n-1} = (P_n | x P_{n-1})$$

avec :

$$-c_n (P_{n-1} | P_{n-1}) = (P_{n+1} | P_{n-1}) - a_n \overbrace{(x P_n | P_{n-1})}^{=(P_n|xP_{n-1})} - b_n \overbrace{(P_n | P_{n-1})}^{=0}$$

Or : $x P_{n-1} = k_{n-1} X^n + \underbrace{Q}_{deg(Q) \leq n-1}$

et $X^n = \dfrac{1}{k_n} P_n + R$ où $deg(R) \leq n-1$ puis :

$(P_n | x P_{n-1}) = \dfrac{k_{n-1}}{k_n} (P_n | P_n)$ qui donne bien :

$$c_n = a_n \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{(P_n | P_n)}{(P_{n-1} | P_{n-1})}.$$

III) Racines, noyau reproduisant

1) Existence de racines réelles.

Théorème : P_n admet n racines distinctes, réelles dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration : $P_n(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$.

Supposons qu'il existe $\alpha_i > 1$. On note

$$S(x) = (X - \lambda_{i_1}) \cdots (X - \lambda_{i_r})$$

lorsque α_{i_j} est impair.

Dans ce cas $P_n(x) S(x)$ est positif (les nouveaux α_i deviennent pairs). Considérons $n \geq 1$, $P_n(x) S(x) > 0$ sauf en λ_{i_j}.

De plus, comme il existe $\alpha_i > 1$, $r < n$.

On a donc $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \perp P_n$ puis

$$0 = (S \mid P_n) = \int_a^b \underbrace{S(x) P_n(x) w(x)}_{\geq 0 \text{ p.p.}} \, dx$$

donc, par positivité, $S(x) P_n(x) w(x) = 0$ p.p.. Comme $w > 0$ p.p. et que $S P_n$ est continue, $S P_n \equiv 0$, ce qui est faux.

2) Entrelacement des racines.

Théorème: Soit $n \geq 1$. Si $y_1 \leq \dots \leq y_{n+1}$ sont les racines de P_{n+1} et $x_1 \leq \dots \leq x_n$ les racines de P_n, on a :

$$y_1 < x_1 < y_2 < \dots < y_n < x_n < y_{n+1}.$$

Démonstration: Considérons la relation de récurrence

$$P_{n+1}(X) = (a_n X + b_n) P_n(X) - c_n P_{n-1}(X).$$

Sans changer les racine des P_i, supposons que leur coefficient dominant est positif. On a donc:

$$a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} > 0 \quad \text{et} \quad c_n = a_n \frac{k_{n-1}}{k_n} \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})} > 0.$$

Comme le coefficient dominant est positif,

P_{n+1} est strictement positif sur $]y_{n+1}, +\infty[$, $]y_{n-1}, y_n[$, ...

P_{n+1} est strictement négatif sur $]y_n, y_{n+1}[$, ...

Procédons par récurrence. Supposons que les racines de P_{n-1} et P_n soient entrelacées. On a le tableau, en notant $w_1, \dots, w_{n-1}$ les racines de P_{n-1} :

racines	$+\infty$ x_n	w_{n-1}	x_{n-1}	w_{n-2}	x_{n-2}	w_{n-3}	.....	$-\infty$
signe de P_n	+ 0	+	0	+	0	−	......	
signe de P_{n-1}	+	0	−	0	+	0	−	

Ainsi $P_{n-1}(x_j)$ est du signe de $(-1)^{n-j}$.
Avec la relation de récurrence,

$$P_{n+1}(x_j) = -\underbrace{c_n}_{>0} \underbrace{P_{n-1}(x_j)}_{\neq 0} \text{ est du signe de } (-1)^{n+1-j}.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, P_{n+1} admet donc une racine sur les intervalles $]x_j, x_{j-1}[$ pour $j \in [\![n, 2]\!]$. On a donc $n-1$ racines.
Comme on a supposé que le coefficient dominant est positif, $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$. Or $P_{n+1}(x_n)$ est <0 donc P_{n+1} admet une racine sur $]+\infty, x_n[$.
Il manque x_1. On distingue deux cas :

(i) $n+1$ est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$ et $P_{n+1}(x_1)$ est du signe de $(-1)^n = -1 < 0$ donc P_{n+1} s'annule sur $]x_1, +\infty[$

(ii) $n+1$ est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$ et $P_{n+1}(x_1)$ est du signe de $(-1)^n = 1 > 0$ donc P_{n+1} s'annule sur $]x_1, +\infty[$

On a bien $n+1$ racines.

3) Projection sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Nous disposons d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $(\cdot|\cdot)_w$ et on peut donc noter :

$$S_n : L^2([a,b], w(t)\,dt) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$

$$f \longmapsto S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, P_k)_w}{(P_k, P_k)_w} P_k(x)$$

Théorème: On appelle noyau de Christoffel - Darboux le polynôme $K_n(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que :

$$\forall f \in L^2([a,b], w(t)\,dt), \quad S_n(f)(x) = \int_a^b K_n(x,y) f(y) w(y)\,dy$$

On a de plus les expressions :

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{1}{(P_n, P_n)_w} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \quad x \neq y$$

$$K_n(x,x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{1}{(P_n, P_n)_w} \left[P_{n+1}'(x) P_n(x) - P_n'(x) P_{n+1}(x)\right]$$

et de manière générale : $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P_k(x) P_k(y)}{(P_k, P_k)_w}$

avec $P_n(X) = k_n X^n + \dots$

Démonstration: Par définition de S_n,

$$\int_a^b K_n(x,y) f(y) w(y)\,dy = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)}{(P_k|P_k)_w} \int_a^b P_k(y) f(y) w(y)\,dy$$

donc, ceci étant valable pour toute f,

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x) P_k(y)}{(P_k|P_k)_w}$$

Les autres formules se démontrent par récurrence avec la formule de récurrence et passage à la limite.

$$(*)\quad P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y) = a_n(x-y)P_n(x)P_n(y) - c_n\left(P_{n-1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n-1}(y)\right)$$

donc, par récurrence :

$$-c_n\left(P_{n-2}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n-1}(y)\right) = \underbrace{c_n\, a_{n-1}}_{\overset{\Downarrow}{=}\, (P_n|P_n)_w\, a_n} (P_{n-1}|P_{n-1})_w\, K_{n-1}(x,y) \times (x-y)$$

car $c_n = a_n \underbrace{\dfrac{k_{n-1}}{k_n}}_{= \frac{1}{a_{n-1}}} \dfrac{(P_n|P_n)_w}{(P_{n-1}|P_{n-1})_w}$

donc, comme $K_n(x,y) = \dfrac{P_n(x)P_n(y)}{(P_n|P_n)_w} + K_{n-1}(x,y)$, on a bien :

$$\underbrace{\frac{k_n}{k_{n+1}}}_{a_n^{-1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_n(y)}{(P_n|P_n)_w(x-y)} = K_n(x,y) \quad \text{par } (*)$$

Pour la seconde formule, on écrit :

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}\frac{1}{(P_n|P_n)_w}\left[\underbrace{\frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(y)}{x-y}}_{\to P'_{n+1}(x)} \overset{\nearrow P_n(x)}{P_n(y)} - \overset{\nearrow P_{n+1}(x)}{P_{n+1}(y)} \underbrace{\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}}_{\downarrow\, P'_n(x)}\right]$$

et on fait tendre $y \longrightarrow x$

On remarque que $K_n(x,x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P_k(x)^2}{(P_k|P_k)_w} \geqslant 0$ et $\neq 0$ car $P_0 \neq 0$.

Ainsi, pour tout x, $P'_{n+1}(x)P_n(x) > P_{n+1}P'_n(x)$. Ceci redémontre l'entrelacement des racines, $P'_{n+1}(y_j)P_n(y_j) > 0$ sont de même signe donc $P_n(y_j)$ est du signe de $(-1)^{n-j}$ donc il existe toujours une racine de P_n entre y_j et y_{j-1} strictement.

IV) Aspects différentiels.

Dans cette partie, on généralise à des intervalles $I =]a, b[$ où a, b peuvent être infinis.

Soit $Q = q_2 X^2 + q_1 X + q_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et ~~L~~ $L = l_1 X + l_0 \in \mathbb{R}_1[X]$. On suppose que l'équation différentielle :

$$Q y' + (Q' - L) y = 0$$

admet une solution $w > 0$ sur I et telle que $\lim_{x \to a, b} Q(x) w(x) = 0$.

1) Opérateur de dérivation.

On définit l'opérateur :

$$T : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto Q P'' + L P'$$

__Théorème__ : Supposons que $-\frac{l_1}{q_2} \notin \mathbb{N}$. Il existe une famille de vecteurs propres pour T. Cette famille de vecteurs propres est, à multiplication par des constantes près, la famille de polynômes orthogonaux associés au poids w. Les valeurs propres sont distinctes.

__Démonstration__ : Comme $w > 0$ sur I, on peut écrire, puisque

$$(Q w P')' = (Q w)' P' + Q w P'' = L w P' + Q w P'',$$

$$T(P) = \frac{1}{w} (Q w P')'.$$

L'opérateur T est autoadjoint ~~xxx~~ pour $(\cdot \mid \cdot)_w$ car, si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$,

$$(T(P_1), P_2)_w = \int_I \frac{1}{w(x)} (Q w P_1')'(x) P_2(x) w(x)\, dx$$

$$= \int_I (Q w P')'(x) P_2(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\Big[(Q \underbrace{w}_{\to 0 \text{ en } a, b} P')(x) P_2(x) \Big]_a^b}_{=0} - \underbrace{\int_I Q w\, P_1'(x) P_2'(x)\, dx}_{\text{symétrique}}$$

L'opérateur $T_{|\mathbb{R}_n[X]}$ est donc symétrique, il est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ainsi T admet un vecteur propre de degré n que l'on note P_n. La valeur propre de T pour le polynôme P_n donne, par égalité du terme de plus haut degré :

$$\lambda_n = \underbrace{n(n-1) q_2}_{\text{terme de } Q P_n''} + \underbrace{n\, l_1}_{\text{terme de } L P'}$$

Soit $m \neq n \in \mathbb{N}$ (fixons $m > n$). P_m est un polynôme de degré m propre pour $T_{|\mathbb{R}_m[X]}$ associé à λ_m. De plus P_n est également propre pour $T_{|\mathbb{R}_m[X]}$ pour λ_n.

Or si $\lambda_m = \lambda_n$, $q_2(n(n-1)) + l_1 n = q_2\, m(m-1) + l_1 m$ ce qui donnerait $-\frac{l_1}{q_2} = n + m - 1$ ce qui est impossible par hypothèse.

Or deux sous espaces propres distincts sont orthogonaux, c'est à dire $P_n \perp P_m$.

Les polynômes P_i ainsi construits sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{i-1}[X]$ et de degré i, ce sont les polynômes orthogonaux.

Ainsi les polynômes orthogonaux sont solutions de l'équation différentielle ;

$$Q P_n'' + L P_n' = \lambda_n P_n .$$

On montrera au prochain cours que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne.

Les équations différentielles peuvent s'écrire sous d'autres formes. On remarquant que w s'écrit :

$$w(x) = w(d)\, e^{-\int_d^x \frac{Q'(u) - L(u)}{Q(u)} du}$$

où $d \in I$ ou bien,

$$w(x) = \frac{w(d)}{Q(x)}\, e^{+\int_d^x \frac{L(u)}{Q(u)} du} .$$

Si on pose $R(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{L(u)}{Q(u)} du}$, on a :

$$(R y')' = R y'' + R' y' = R y'' + \frac{RL}{Q} y'$$

donc l'équation différentielle devient :

$$R y'' + \frac{RL}{Q} y' = \frac{\lambda_n R}{Q} y .$$

De même, si $S(x) = \sqrt{R(x)} = e^{\int_{x_0}^x \frac{L(u)}{2Q(u)} du}$, l'équation différentielle devient :

$$y'' = \left(\frac{\lambda_n}{Q} + \frac{S''}{S}\right) y$$

2) Formule de Rodrigues

Pour certains poids, il est possible, lorsque :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{w(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\;Q(x)^n\right]\in\mathbb{R}[X]$$

de degré exactement n, de démontrer que (à constante multiplicative près) :

$$P_n(x)=\frac{1}{w(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\,Q(x)^n\right].$$

Il ne reste qu'à démontrer que $\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)Q(x)^n\right]$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En effet, soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a :

$$\int_I P(x)\frac{1}{w(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\,Q(x)^n\right]w(x)\,dx=\int_I P(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\left(w(x)Q(x)^n\right)dx$$

intégrations par parties

$w(x)\,Q(x)\xrightarrow[x\to a,b]{}0$

$$=(-1)^n\int_I \underbrace{P^{(n)}(x)}_{=0}\,Q(x)^n\,w(x)\,dx=0.$$

Ceci est le cas pour $w(x)=e^{-x^2}$, il est clair dans ce cas que :

$$e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big[e^{-x^2}\underbrace{1}_{Q(x)}{}^n\Big]\in\mathbb{R}[X]$$ et de degré n.

(polynômes de Hermite).

6 Densité des polynômes orthogonaux

Quelques définitions et rappels.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle poids toute fonction $\omega : I \to \mathbb{R}$ mesurable, partout > 0 et « à décroissance rapide » dans le sens suivant : $\int_I |x|^n \omega(x) \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout entier n (autrement dit les polynômes sont intégrables pour la mesure $\omega \mathrm{d}\lambda$). En particulier, si I est borné, toute fonction intégrable > 0 convient.

Par définition de la fonction poids, la mesure $\omega \mathrm{d}\lambda$ sur I est finie. En particulier, on a $\mathrm{L}^r(I, \omega \mathrm{d}\lambda) \subset \mathrm{L}^s(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ dès que $r \geqslant s$.

$\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\omega = \int_I f(x) g(x) \omega(x) \mathrm{d}x$. Le k-ème polynôme orthogonal associé à ω est le polynôme de norme 1 qui dirige la droite vectorielle orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$. On montre que la famille des polynômes orthogonaux s'obtient également en appliquant le procédé de Gram-Schmidt sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Bref, une telle famille orthonormale de polynômes échelonnés existe et est unique, de plus c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème. *Si ω est « à décroissance exponentielle » dans le sens suivant : $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \omega(x) dx < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2(I, \omega d\lambda)$.*

Preuve.
Nous avons déjà vu que la famille des polynômes orthogonaux associés à ω est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$. Qu'elle soit une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ revient donc à dire que les polynômes sont denses de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$. Nous allons montrer que $\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}^{\perp_\omega} = \{0\}$, ce qui répondra à la question.

Soit donc $f \in \mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ telle que $\int_I x^n f(x) \omega(x) \mathrm{d}x = 0$ pour tout entier n. Il s'agit de montrer que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$.

Soit g la fonction définie (presque partout) sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \omega(x) \mathbf{1}_I(x)$. Alors $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (car $f \in \mathrm{L}^1(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$), on peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat{g} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) g(x) \omega(x) \mathrm{d}x$. Nous allons montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im} z| < \alpha/2\}$.

Pour cela, on introduit la fonction F définie par $F(z) = \int_I h(z, x) \mathrm{d}x$, où on a noté $h(z, x) = e^{-izx} f(x) \omega(x)$ (à peu de choses près, il s'agit de la transformée de Laplace de g).

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur B_α :
– Pour tout $x \in I$, $z \mapsto h(z, x)$ est holomorphe sur B_α.

– Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z,x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables.
– Pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto h(z,x)$ est majorée en module par $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}|f(x)|\omega(x)$, qui est une fonction intégrable sur I (et indépendante de z). En effet, $x \mapsto e^{|\alpha|x/2}$ et f sont des fonctions de $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$ par hypothèse, leur produit est donc dans $\mathrm{L}^1(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$.

D'après le théorème d'holomorphie relatif aux intégrales à paramètre, la fonction F est bien définie et holomorphe sur $B\alpha$.

De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n h(z,x)}{\partial z^n} \mathrm{d}x$ soit $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\omega(x)\mathrm{d}x$. En particulier (en utilisant l'hypothèse sur f), on a $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que F est nulle sur un voisinage de 0, puis que F est nulle sur tout B_α par principe de prolongement analytique. En particulier, sa restriction $\hat{g}$ à l'axe des réels est identiquement nulle.

Par injectivité de la transformée de FOURIER sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on en déduit que $g \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur $\mathbb{R}$, puis que $f \overset{\text{p.p.}}{=} 0$ sur I (car ω reste > 0 sur I).

$\square$

L'hypothèse « à décroissance rapide » ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant :

On pose $I =]0, +\infty[$ et $\omega(x) = x^{-\log(x)}$ pour $x \in I$. w est bien un poids sur I. Nous allons montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi \log(x))$ n'est pas limite de polynômes dans $\mathrm{L}^2(I, \omega \mathrm{d}\lambda)$: f n'est pas la fonction nulle (presque partout), or pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle X^n, f \rangle_\omega = 0$. Vérifions-le :

Par le changement de variable $y = \log(x)$ (qui est un difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$), on a $\langle X^n, f \rangle_\omega = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \log(x))\omega(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \mathrm{d}y$, soit $\langle X^n, f \rangle_\omega = e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-\frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y)\mathrm{d}y$, puis par le changement de variable affine $u = y - \frac{n+1}{2}$, il vient $\langle X^n, f \rangle_\omega = (-1)^{n+1} e^{(n+1)^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin(2\pi u)\mathrm{d}u$. L'intégrande étant une fonction impaire, on a effectivement $\langle X^n, f \rangle_\omega = 0$.

Leçons possibles
(**201** Espaces de fonctions. Exemples et applications.)
202 Exemples de parties denses et applications. (205 Espaces complets. Exemples et applications.)
(**209** Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.)
212 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
234 Espaces L^p
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
240 Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.
(**244** Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.)
(**245** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.)
248 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiale ou polynômiales par morceaux. Exemples.

Références
[BMP05]

Ceci démontre, dans le cas où le poids décroît suffisamment rapidement, que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, w(t)\,dt)$ lorsque les polynômes sont normalisés.

Une autre méthode de démonstration découle notamment du théorème de Bernstein qui est un théorème de Stone Weierstrass précisé (la preuve probabiliste est donnée en annexe) mais n'est valable que lorsque a et b sont finis.

__Théorème :__ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Alors

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|,\ |u-v|\leqslant h\}$.

On obtient à l'aide de ce théorème, en notant :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k, f)_w}{(P_k, P_k)_w} P_k(x),$$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2([a,b], w(t)\,dt)} = \inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - f\|_{L^2([a,b], w(t)\,dt)}$$

car $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ $\leqslant \|B_n - f\|_{L^2([a,b], w(t)\,dt)}$

$$\leqslant \|B_n - f\|_\infty$$

d'où la convergence et le caractère hilbertien de

$$\left(\frac{P_n}{\sqrt{(P_n, P_n)_w}}\right)_{n\geqslant 0}.$$

VII) Exemples

1) Polynômes de Legendre

$[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = 1$,

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

Unicité fixée avec $P_n(1) = 1$.

$$(P_n | P_n)_w = \frac{2}{2n+1}$$

$Q(x) = x^2 - 1$, $L(x) = (-2x)$

$\lambda_n = n(n+1)$ Ils sont liés aux harmoniques sphériques.

2) Polynômes de Hermite

Ils interviennent dans les vecteurs propres de la transformée de Fourier.

$I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$

On assure l'unicité par $k_n = 2^n$.

$(P_n | P_n)_w = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

$Q(x) = 1$, $L(x) = -2x$, $\lambda_n = 2n$

$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\right]$$

$a_n = 2$, $c_n = 2n$

3) Polynômes de Chebychev

$[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On assure l'unicité avec $P_n(1) = 1$.

$$(P_n|P_n)_w = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$k_n = 2^{n-1}$, $Q(x) = 1 - x^2$, $L(x) = -x$, $\lambda_n = n^2$.

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]\sqrt{1-x^2}$$

$a_n = 2$, $c_n = 1$, $b_n = 0$

Ils interviennent dans les développements de $\cos(nx)$.

Les racines sont $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$ pour P_{n+1} et $k = 0, \dots, n$

On a le théorème suivant de minimisation de la norme de l'interpolation infinie qui est liée à la minimisation de l'interpolation d'une fonction :

<u>Théorème</u> : $\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$ est minimal si et seulement si $(x-x_0)\cdots(x-x_n) = 2^{-n} P_{n+1}(x)$

<u>Eléments de démonstration</u> : Raisonnons par l'absurde avec $P(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$ et $\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| > \max_{x\in[-1,1]} 2^{-n} P_{n+1}(x)$ avec $P \neq 2^{-n}P_{n+1}$. Si $D(x) = P(x) - 2^{-n}P_{n+1}(x)$, un dessin montre que D s'annule sur chaque $\left[\cos\left((k+1)\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]$ pour $k = 0, \dots, n-1$. ~~[illegible]~~
D possède donc n racines (il faut compter deux fois les racines au bord car dans ce cas $P(a) = 0 = P'_{n+1}(a)$). Comme D est de degré n (coefficient dominant de P et $2^{-n}P_{n+1}$ est le même), $D(x) \equiv 0 \to$ contradiction.

Polynômes de Bernstein. [ZQ]

Prop:
- $P(|X|\geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$ (Markov)
- $P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$ (Tchebychev)

Dém. • $|X| = |X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} + |X|\mathbb{1}_{\{|X|<t\}} \geq t\,\mathbb{1}_{\{|X|\geq t\}} + 0$

Donc $\mathbb{E}(|X|) \geq t\,P(\{|X|\geq t\})$. OK.

• $P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq t) = P(|X-\mathbb{E}(X)|^2\geq t^2) \leq \frac{1}{t^2}\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \frac{V(X)}{t^2}$.

Th: (loi faible des grands nombres)
$X_1,\dots,X_n$ des v.a de L^2. $S_n = X_1+\dots+X_n$.
Alors $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(X)\right|>t\right) \leq \frac{V(X)}{nt^2}$ $\forall t>0$. $\left(\rightsquigarrow \frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}(X)\right)$

Dém: $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(X)\right|>t\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|>t\right) \leq \frac{1}{t^2}V\left(\frac{S_n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n^2t^2}V(S_n)$$

$$= \frac{1}{n^2t^2}\sum V(X_i) = \frac{V(X)}{nt^2} \blacksquare$$

Théorème (Bernstein)
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ continue. $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v|\leq h\}$ son module de continuité uniforme. Alors on peut construire une suite de polynômes (B_n) tq $B_n \xrightarrow{U} f$, et $\|f-B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Dém. $X_1,\dots,X_n$ des v.a i.i.d de loi $Ber(x)$, $x\in[0,1]$.
$S_n = X_1+\dots+X_n$. Notons $B_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$S_n \rightsquigarrow Bin(n,x)$

Les B_n sont des polynômes.
Soit $\delta > 0$

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|f(x) - \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right)$$

Or $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leqslant \omega(\delta)$ si $\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leqslant \delta$

et $\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty$ sinon.

Donc $|f(x) - B_n(x)| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\{|x - \frac{S_n}{n}| \leqslant \delta\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbb{1}_{\{|x - \frac{S_n}{n}| \geqslant \delta\}}\right)$

$$\leqslant \mathbb{E}\left(\omega(\delta)\mathbb{1}_{\{|x - \frac{S_n}{n}| \leqslant \delta\}}\right) + \mathbb{E}\left(2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{|x - \frac{S_n}{n}| \geqslant \delta\}}\right)$$

$$\leqslant \omega(\delta) P\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leqslant \delta\right) + 2\|f\|_\infty P\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geqslant \delta\right)$$

$$\leqslant \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{V(X_1)}{n\delta^2} \qquad \left(V(X_1) = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}\right)$$

$$\leqslant \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Donc $\overline{\lim} \|f - B_n\|_\infty \leqslant \omega(\delta)$.
Or f UC donc $\omega(\delta) \to 0$.
Donc $\|f - B_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Vitesse de cv : • $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$
En effet, notons $A_t = \{|f(x) - f(y)|,\ |x - y| \leqslant t\}$.
$[0, t_1 + t_2] = [0, t_1] + [0, t_2]$
Soient $x \leqslant y$ tq $|y - x| \leqslant t_1 + t_2$. Alors $y - x = t_1' + t_2'$ où $t_1' \in [0, t_1]$, $t_2' \in [0, t_2]$
Posons $z = x + t_1'$. $y - x = y - z + z - x$. $y - z \leqslant t_2$ et $z - x \leqslant t_1$
(??) On arrive à $A_{t_1 + t_2} \subset A_{t_1} + A_{t_2}$. On passe au sup.

- Récurrence facile : $\omega(rt) \leq r\,\omega(t) \quad \forall r \in \mathbb{N}$.
- $\forall \lambda \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \underline{\omega(\lambda t) \leq (\lambda+1)\,\omega(t)}$.

en effet, soit $q \in \mathbb{N}$ tq $q \leq \lambda \leq q+1$.

$$\begin{aligned} \omega(\lambda t) &\leq \omega((q+1)t) \quad (\omega \nearrow) \\ &\leq (q+1)\,\omega(t) \\ &\leq (\lambda+1)\,\omega(t) \end{aligned}$$

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) = \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sqrt{n}\,x - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|\right) \leq \left(\left|\sqrt{n}\,x - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Or $|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right)$

Donc
$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \mathbb{E}\left(\left(\left|\sqrt{n}\,x - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right) \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2\right) \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \\ &\leq \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

En effet, $\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2^2 = \mathbb{E}\left(\left(x - \frac{S_n}{n}\right)^2\right) = V\left(x - \frac{S_n}{n}\right) + \mathbb{E}\cancel{\left(x - \frac{S_n}{n}\right)}^2$

$$= \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}\,n\,x(1-x) \quad \blacksquare$$